



ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

# Μικροοικονομική Ανάλυση I

Θεωρία της Παραγωγής

Οικονομίες κλίμακας και  
ελαστικότητα υποκατάστασης

Τμήμα: Αγροτικής Οικονομίας & Ανάπτυξης

Διδάσκων: Λαζαρίδης Παναγιώτης



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





# Μαθησιακοί Στόχοι

- Γνώση και κατανόηση της έννοιας των οικονομιών κλίμακας και της ελαστικότητας κλίμακας.
- Ικανότητα υπολογισμού της ελαστικότητας κλίμακας χρησιμοποιώντας παραδείγματα συναρτήσεων παραγωγής.
- Γνώση και κατανόηση της έννοιας της ελαστικότητας υποκατάστασης.



# Αποδόσεις Κλίμακας ή Οικονομίες Κλίμακας 1/5

Μεταβολή όλων των  
συντελεστών παραγωγής  
κατά το ίδιο ποσοστό.



Μεταβολή στην  
παραγόμενη ποσότητα.

## Αύξουσες Αποδόσεις (Οικονομίες) Κλίμακας

% μεταβολής της  
παραγόμενης  
ποσότητας



% μεταβολής των  
συντελεστών



# Αποδόσεις Κλίμακας ή Οικονομίες Κλίμακας 2/5

## Φθίνουσες Αποδόσεις (Οικονομίες) Κλίμακας

% μεταβολής της  
παραγόμενης  
ποσότητας  $<$

% μεταβολής των  
συντελεστών

## Σταθερές Αποδόσεις (Οικονομίες) Κλίμακας

% μεταβολής της  
παραγόμενης  
ποσότητας  $=$

% μεταβολής των  
συντελεστών



# Αποδόσεις Κλίμακας ή Οικονομίες Κλίμακας 3/5

Ομογενείς συναρτήσεις παραγωγής

$$Q = F(K, L)$$

Ομογενής βαθμού  $r$  αν  $F(tK, tL) = t^r F(K, L)$

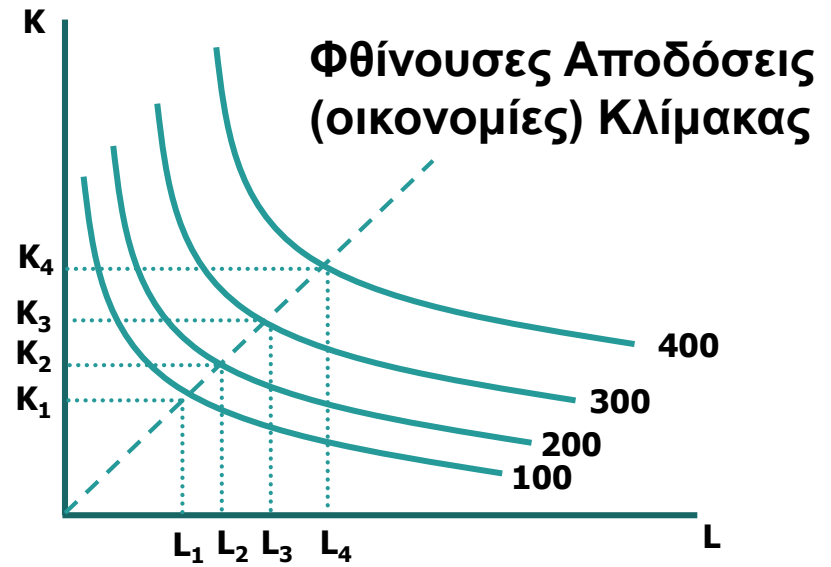
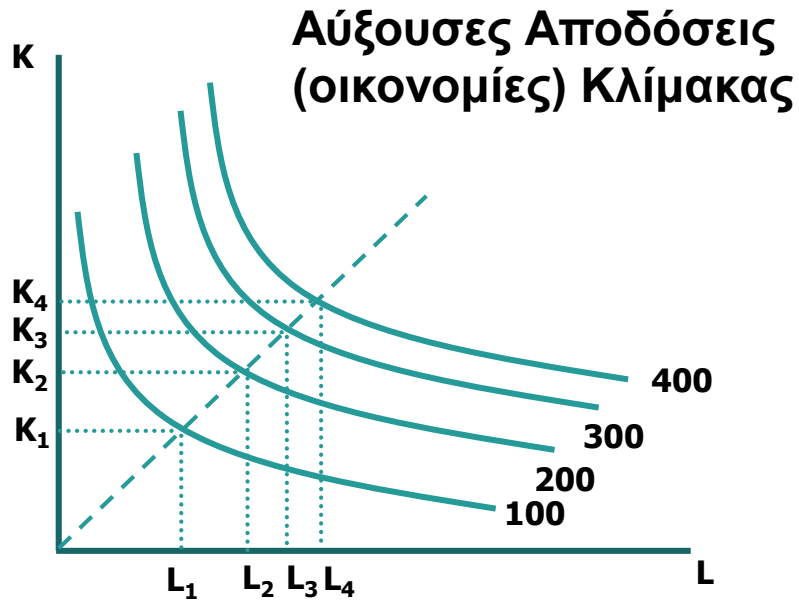
**Αύξουσες Αποδόσεις (Οικονομίες) Κλίμακας  $r > 1$**

**Φθίνουσες Αποδόσεις (Οικονομίες) Κλίμακας  $r < 1$**

**Σταθερές Αποδόσεις (Οικονομίες) Κλίμακας  $r = 1$**

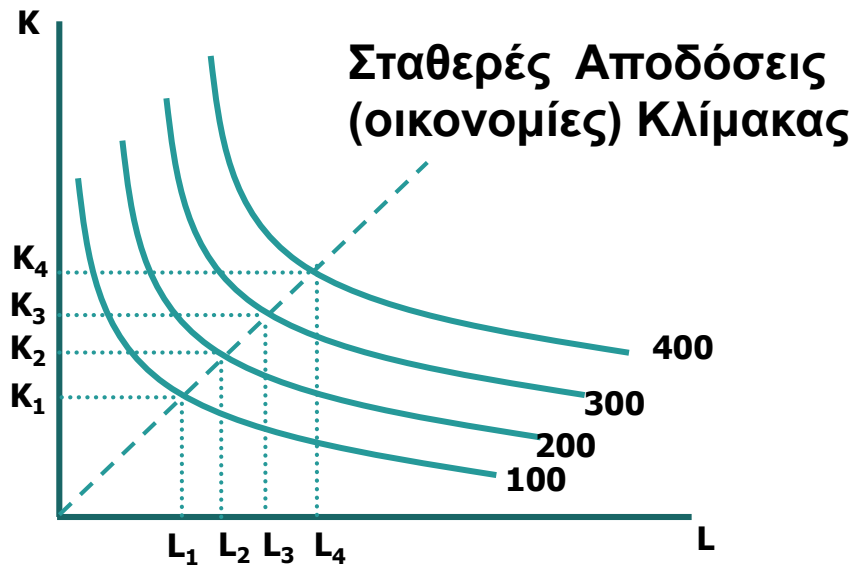


# Αποδόσεις Κλίμακας ή Οικονομίες Κλίμακας 4/5





# Αποδόσεις Κλίμακας ή Οικονομίες Κλίμακας 5/5





# Παράδειγμα 1

$$Q = L^2 + K^2 + 10KL$$

$$(tL)^2 + (tK)^2 + 10(tK)(tL) = t^2(L^2 + K^2 + 10KL) = t^2Q$$

$r = 2$  **Αύξουσες Οικονομίες Κλίμακας**

$$Q = L^{0,4} K^{0,6}$$

$$(tL)^{0,4} (tK)^{0,6} = t(L^{0,4} K^{0,6}) = tQ$$

$r = 1$  **Σταθερές Οικονομίες Κλίμακας**

$$Q = 20L^{0,3} K^{0,3}$$

$$20(tL)^{0,3} (tK)^{0,3} = t^{0,6} (20L^{0,3} K^{0,3})$$

$r = 0,6$  **Φθίνουσες Οικονομίες Κλίμακας**





# Ελαστικότητα Κλίμακας 1/2

Ποσοστιαία μεταβολή στην παραγόμενη ποσότητα  
ύστερα από μια μεταβολή στις εισροές κατά 1%.

$$E_{SC} = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta \mu/\mu} \quad \text{ή} \quad E_{SC} = \frac{dQ/Q}{d\mu/\mu}$$

$$E_{SC} = E_{Q,K} + E_{Q,L}$$



# Ελαστικότητα Κλίμακας 2/2

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL \quad \frac{dQ}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{dK}{Q} \frac{K}{K} + \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{dL}{Q} \frac{L}{L}$$

επειδή  $\frac{dK}{K} = \frac{dL}{L} = \frac{d\mu}{\mu}$

$$\frac{dQ/Q}{d\mu/\mu} = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q} + \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{L}{Q}$$

$$E_{SC} = E_{Q,K} + E_{Q,L}$$



# Παράδειγμα 2

$$Q = L^2 + K^2 + 10KL \quad E_{Q,L} = \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{L}{Q} = (2L + 10K) \frac{L}{Q}$$

$$E_{Q,K} = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q} = (2K + 10L) \frac{K}{Q}$$

$$\begin{aligned} E_{Q,L} + E_{Q,K} &= (2L + 10K) \frac{L}{Q} + (2K + 10L) \frac{K}{Q} \\ &= \frac{2L^2 + 10KL + 2K^2 + 10KL}{Q} \\ &= \frac{2(L^2 + K^2 + 10KL)}{Q} = \frac{2Q}{Q} = 2 \end{aligned}$$



# Παράδειγμα 3

$$Q = L^{0,4} K^{0,6}$$

$$\begin{aligned} E_{Q,L} &= \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{L}{Q} = 0,4 L^{-0,6} K^{0,6} \frac{L}{Q} \\ &= 0,4 (L^{0,4} K^{0,6}) \frac{1}{Q} = 0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{Q,K} &= \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q} = 0,6 L^{0,4} K^{-0,4} \frac{K}{Q} \\ &= 0,6 (L^{0,4} K^{0,6}) \frac{1}{Q} = 0,6 \end{aligned}$$

$$E_{Q,L} + E_{Q,K} = 0,4 + 0,6 = 1$$



# Παράδειγμα 4

$$Q = AL^\alpha K^\beta$$

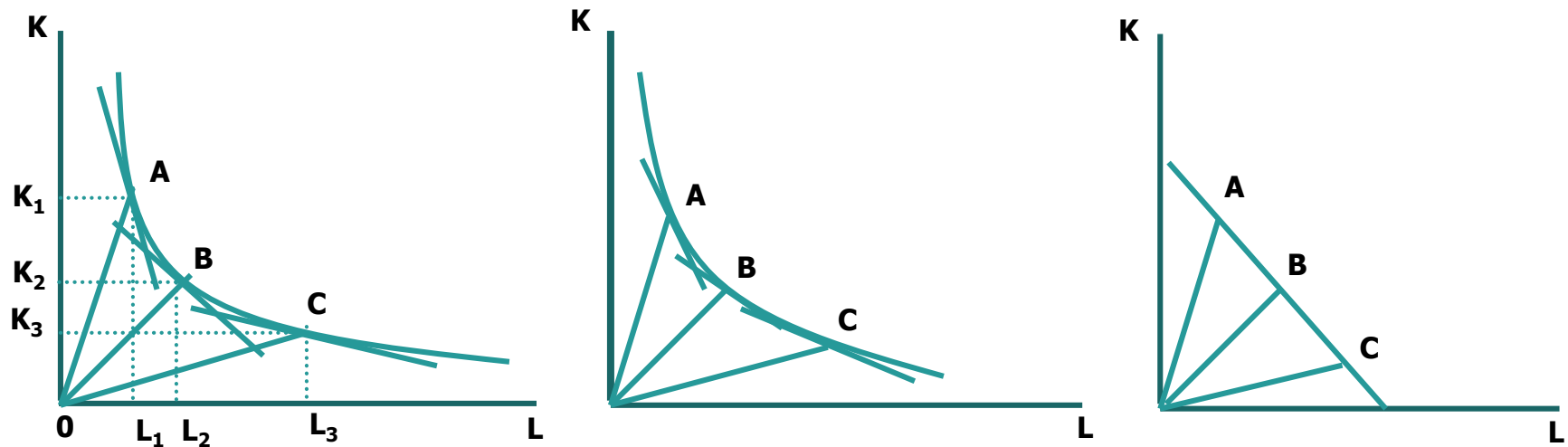
$$\begin{aligned} E_{Q,L} &= \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{L}{Q} = A\alpha L^{1-\alpha} K^\beta \frac{L}{Q} \\ &= \alpha (AL^\alpha K^\beta) \frac{1}{Q} = \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{Q,K} &= \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q} = A\beta L^\alpha K^{1-\beta} \frac{K}{Q} \\ &= \beta (AL^\alpha K^\beta) \frac{1}{Q} = \beta \end{aligned}$$

$$E_{Q,L} + E_{Q,K} = \alpha + \beta$$



# Ελαστικότητα Υποκατάστασης 1/3



Στο A η κλίση της OA  $\longrightarrow \frac{K}{L}$

η κλίση της εφαπτομένης  $\longrightarrow MRTS_{L,K}$



# Ελαστικότητα Υποκατάστασης 2/3

Όσο πιο εύκολη είναι η υποκατάσταση τόσο πιο αργή είναι η μεταβολή του MRTS σε σχέση με την μεταβολή του λόγου K/L.

$$\sigma = \frac{\% \Delta \left( \frac{K}{L} \right)}{\% \Delta (MRTS_{L,K})} \quad \text{ή} \quad \sigma = \frac{d(K/L)/(K/L)}{d(MRTS_{L,K})/MRTS_{L,K}}$$

Ποσοστιαία μεταβολή στον λόγο K/L ύστερα από μια μεταβολή του ΟΛΤΥ (MRTS) κατά 1%.



# Ελαστικότητα Υποκατάστασης 3/3

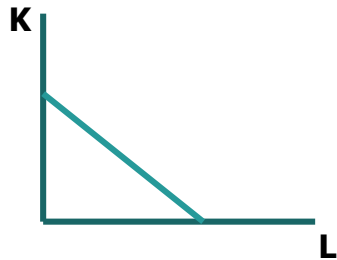
- Πάντα  $\sigma > 0$ .
- Όσο μεγαλύτερη η τιμή του  $\sigma$  τόσο πιο εύκολη η υποκατάσταση.





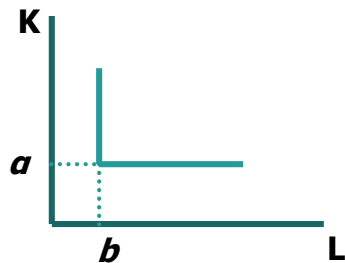
# Ειδικές περιπτώσεις ελαστικότητας υποκατάστασης 1/3

1.  $\sigma = \infty$



$$Q = \min \left\{ \frac{K}{a}, \frac{L}{b} \right\}$$

2.  $\sigma = 0$





# Ειδικές περιπτώσεις ελαστικότητας υποκατάστασης 2/3

## Παράδειγμα

Παραγωγή 1 μονάδας προϊόντος απαιτεί 1K και 3 L.

$$Q = \min \left\{ \frac{K}{1}, \frac{L}{3} \right\} \quad \frac{K}{L} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{K}{L} > \frac{1}{3} \rightarrow \text{Πλεονάζον κεφάλαιο} \quad \frac{K}{L} < \frac{1}{3} \rightarrow \text{Πλεονάζουσα εργασία}$$



# Ειδικές περιπτώσεις ελαστικότητας υποκατάστασης 3/3

3.  $\sigma = c$  (σταθερή ελαστικότητα υποκατάστασης).

$$Q = \gamma \left[ \delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho} \right]^{-\frac{\nu}{\rho}}$$

όπου  $-1 < \rho < \infty$   $\rho \neq 0$   $0 < \delta < 1$   $\nu, \gamma > 0$   $\sigma = \frac{1}{1 + \rho}$

Συνάρτηση **CES** (Constant Elasticity of Substitution).

4.  $\sigma = 1$   $Q = AK^a L^b$  Συνάρτηση **Cobb-Douglas**.



# Βιβλιογραφία 1/2

1. Η Ελληνική μετάφραση του “Microeconomics” , Besanko David A., Braeutigam Ronald R., John Wiley & Sons, Inc.2008

**Besanko David A., Braeutigam Ronald R.**

**ΜΙΚΡΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ**

**Εκδόσεις Γ. ΔΑΡΔΑΝΟΣ – Κ.ΔΑΡΔΑΝΟΣ Ο.Ε. 2009**

2. Η Ελληνική μετάφραση του “Microeconomics” , M. L. Katz and H. S. Rosen, McGraw Hill Companies Inc. 1998.

**M. L. Katz and H. S. Rosen**

**ΜΙΚΡΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ**

**Εκδόσεις: ΕΠΙΚΕΝΤΡΟ, 2007**



# Βιβλιογραφία 2/2

3. Η Ελληνική μετάφραση του “Microeconomics” , Μ. Chacholiades, Macmillan Publishing Company. 1986.

**M. Chacholiades**

**ΜΙΚΡΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ Ι**

**Εκδόσεις: ΚΡΙΤΙΚΗ, 1990**



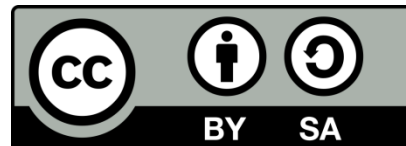
# Λέξεις – έννοιες κλειδιά

- Οικονομίες κλίμακας, ελαστικότητα κλίμακας, ελαστικότητα υποκατάστασης.



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Γεωπονικού Πανεπιστημίου Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.







# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών 2014. Τμήμα Αγροτικής Οικονομίας και Ανάπτυξης, Λαζαρίδης Παναγιώτης, «Μικροοικονομική Ανάλυση 1». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<https://mediasrv.aua.gr/eclass/courses/OCDAERD103/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων, π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Η άδεια αυτή ανήκει στις άδειες που ακολουθούν τις προδιαγραφές του Ορισμού Ανοικτής Γνώσης [2], είναι ανοικτό πολιτιστικό έργο [3] και για το λόγο αυτό αποτελεί ανοικτό περιεχόμενο [4].

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

[2] <http://opendefinition.org/okd/ellinika/>

[3] <http://freedomdefined.org/Definition/EI>

[4] <http://opendefinition.org/buttons/>



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
  - το Σημείωμα Αδειοδότησης
  - τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
  - το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)
- μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.