



ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών

Ενότητα 2:

Αποθήκευση Δεδομένων, 2ΔΩ

Τμήμα: Αγροτικής Οικονομίας & Ανάπτυξης

Διδάσκων: Θεόδωρος Τσιλιγκιρίδης



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





Μαθησιακοί Στόχοι

Η Ενότητα 2 διαπραγματεύεται θέματα που αφορούν την αναπαράσταση και αποθήκευση των δεδομένων στον ΗΥ. Περιλαμβάνουν κείμενο, αριθμούς, εικόνες ήχο και βίντεο.

- Περιγραφή του ψηφιακού υπολογιστή
- Περιγραφή των διαφόρων τύπων δεδομένων και των τρόπων αναπαράστασής τους στο εσωτερικό του υπολογιστή.
- Αριθμητικά συστήματα, μετατροπές, κώδικες και τέλος πράξεις με bit (αριθμητικές και λογικές).



Λέξεις Κλειδιά

- Bit,
- σχήμα bit,
- δυαδικό, τετραδικό, οκταδικό, δεκαδικό, δεκαεξαδικό σύστημα,
- μετατροπή βάσεων,
- σφάλματα περικοπής,



Σύνοψη – Αριθμητική του Υπολογιστή 2/2

Μάθημα-2: Αποθήκευση δεδομένων

Ενότητα–2.2: Αριθμητική του Υπολογιστή (4ΔΩ)

Ενότητα–2.2.1: Αριθμητικά Συστήματα – Μετατροπές (2ΔΩ)

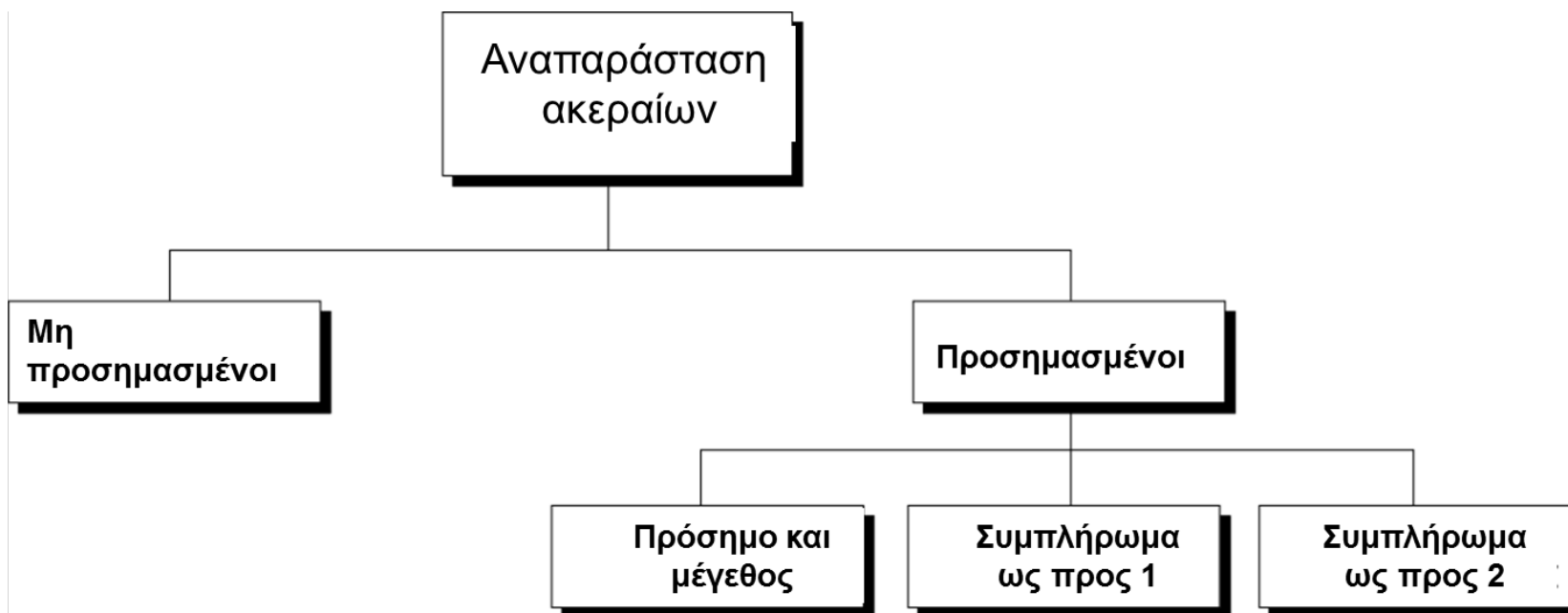
- Αριθμητικά Συστήματα
- Μετατροπή Βάσεων

Ενότητα – 2.2.2: Αναπαραστάσεις – Πράξεις Αριθμών (2ΔΩ)

- Αναπαραστάσεις Αριθμών
 - Μη προσημασμένων ακεραίων
 - Ακεραίων πρόσημου και μεγέθους
 - Ακεραίων με συμβολισμό συμπληρώματος (1 και 2)
 - Ακεραίων με συμβολισμό υπέρβασης ή πλεονάσματος
 - Αναπαράσταση πραγματικών αριθμών κινητής υποδιαστολής
- Αριθμητικές πράξεις



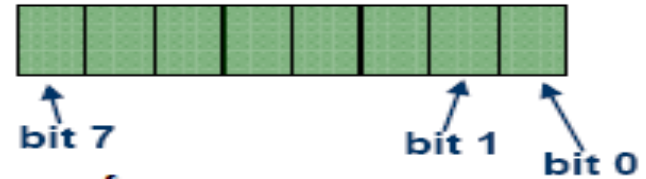
Αναπαράσταση Ακεραίων





Αναπαράσταση Ακεραίων Αριθμών

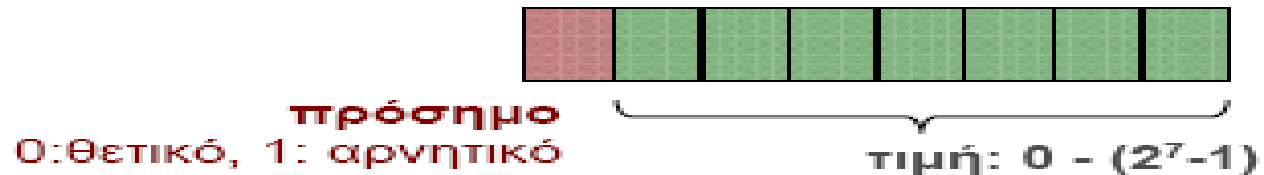
- Μη προσημασμένοι: Από 0 έως (2^8-1)



- Προσημασμένοι: Από $-(2^{n-1}-1)$ έως $(2^{n-1}-1)$

Ένας αριθμός προσημασμένου μεγέθους με n-bits έχει μέγεθος από:

-127 έως 127 (8-bit), -32767 έως 32767 (16-bit).



Αλλάζει μόνο το MSB του αριθμού:

41 = 0 0 1 0 1 0 0 1

-41 = 1 0 1 0 1 0 0 1

127 = 0 1 1 1 1 1 1 1

-127 = 1 1 1 1 1 1 1 1

Το μηδέν έχει τη διπλή αναπαράσταση: 00000000 και 10000000



Αναπαράσταση Μη Προσημασμένων Ακεραίων

Ακέρατοι: Άπειροι θετικοί και αρνητικοί αριθμοί



Περιορισμένο πλήθος ακεραίων μπορεί να αποθηκευτεί στον ΗΥ

# Bits	Εύρος: $0 \dots (2^N - 1)$
8	0 255
16	0 65,535



Αναπαράσταση Μη Προσημασμένων Ακεραίων Παραδείγματα Σε Δύο ΗΥ

Δεκαδικοί

7
234
258
24,760
1,245,678

8-bit δέσμευση

00000111
11101010
υπερχείλιση
υπερχείλιση
υπερχείλιση

16-bit δέσμευση

0000000000000111
0000000011101010
0000000100000010
0110000010111000
υπερχείλιση

Αποθήκευση του 7 σε 8-bit δέσμευση μνήμης

Αλλαγή του δεκαδικού σε δυαδικό: 7 -> 111

Πρόσθεσε 5 μηδενικά για να δημιουργηθούν N=8 bits: 00000111.

Αποθήκευση του 258 σε 16-bit δέσμευση μνήμης

Αλλαγή του δεκαδικού σε δυαδικό: 258 -> 100000010

Πρόσθεσε 7 μηδενικά για να δημιουργηθούν N=16 bits:

0000000100000010.

Χρησιμοποιούνται στην καταμέτρηση και στη διευθυνσιοδότηση των θέσεων μνήμης



Αναπαράσταση Ακεραίων Πρόσημου Και Μεγέθους

Bits	Εύρος: $-(2^{N-1}-1) \dots + (2^{N-1}-1)$			
-----	-----			
8	-127	-0	+0	+127
16	-32,767	-0	+0	+32,767
32	-2,147,483,647	-0	+0	+2,147,483,647

- Το πρώτο αριστερά ψηφίο (bit) δηλώνει το πρόσημο του αριθμού:
0 θετικός, **1**: αρνητικός
- Υπάρχουν δύο μηδενικά,
ένα θετικό (**+0** → **00000000**) και ένα αρνητικό (**-0** → **10000000**)
- Ο ακέραιος δυαδικός αριθμός 10111011 μορφής πρόσημου και μεγέθους αντιστοιχεί στον -59 με δεδομένο ότι το πρώτο αριστερά ψηφίο του είναι το 1 και δηλώνει ότι το πρόσημο του είναι -.



Αναπαράσταση Ακεραίων Πρόσημου και Μεγέθους, Παραδείγματα σε Δύο ΗΥ 1/3

Δεκαδικοί -----	8-bit δέσμευση -----	16-bit δέσμευση -----
+7	00000111	00000000000000111
-124	11111100	0000000011111100
+258	υπερχείλιση	0000000100000010
-24,760	υπερχείλιση	1110000010111000

Αποθήκευση του +7 σε 8-bit δέσμευση μνήμης

Αλλαγή του δεκαδικού σε δυαδικό: 7 -> 111

Πρόσθεσε τέσσερα μηδενικά για να δημιουργηθούν $N-1=8-1=7$ bits: 0000111.

Πρόσθεσε το bit 0 ($N=8$) επειδή ο αριθμός είναι θετικός: 00000111



Αναπαράσταση Ακεραίων Πρόσημου και Μεγέθους, Παραδείγματα σε Δύο ΗΥ 2/3

Δεκαδικοί -----	8-bit δέσμευση -----	16-bit δέσμευση -----
+7	00000111	0000000000000111
-124	11111100	0000000011111100
+258	υπερχείλιση	0000000100000010
-24,760	υπερχείλιση	1110000010111000

Αποθήκευση του -258 σε 16-bit δέσμευση μνήμης

Αλλαγή του δεκαδικού σε δυαδικό: 258 -> 100000010

Πρόσθεσε έξι μηδενικά για να δημιουργηθούν $N-1=16-1=15$ bits: 000000100000010.

Πρόσθεσε το bit 1 ($N=16$) αφού ο αριθμός είναι αρνητικός: 1000000100000010



Αναπαράσταση Ακεραίων Πρόσημου και Μεγέθους, Παραδείγματα σε Δύο ΗΥ 3/3

Δεκαδικοί -----	8-bit δέσμευση -----	16-bit δέσμευση -----
+7	00000111	00000000000000111
-124	11111100	0000000011111100
+258	υπερχείλιση	0000000100000010
-24,760	υπερχείλιση	1110000010111000

Η αναπαράσταση πρόσημου και μεγέθους δε χρησιμοποιείτε σήμερα.

- Μειονέκτημα 1: Δυσχέρεια εκτέλεσης στοιχειωδών υπολογισμών.
- Μειονέκτημα 2: Ύπαρξη δύο μηδενικών.
- Πλεονέκτημα 1: Εύκολη μετατροπή από δεκαδικό σε δυαδικό και αντίστροφα.
- Πλεονέκτημα 2: Βολική σε εφαρμογές - μετατροπή αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά.



Αναπαράσταση Ακεραίων Συμπληρώματος ως Προς $1 \frac{1}{3}$

- Για την αναπαράσταση ενός θετικού αριθμού με τη μορφή συμπληρώματος ως προς ένα χρησιμοποιείται η σύμβαση των μη προσημασμένων ακεραίων.
- Για την αναπαράσταση ενός αρνητικού αριθμού με τη μορφή συμπληρώματος ως προς ένα χρησιμοποιείται το συμπλήρωμα του θετικού αριθμού.
- Γενικά, το συμπλήρωμα ως προς ένα ενός δυαδικού αριθμού A με n δυαδικά ψηφία είναι ο αριθμός $B = (2^n - 1) - A$

Παράδειγμα

$$41 = (00101001)_2$$

$$-41 = (2^8 - 1) - 41 = 255 - 41 = 214 = (11010110)_2$$

$$41 = (000000000101001)_2$$

$$-41 = (2^{16} - 1) - 41 = 65494 = (1111111111010110)_2$$



Αναπαράσταση Ακεραίων Συμπληρώματος ως Προς 1 2/3

- Το συμπλήρωμα ως προς ένα προκύπτει από το θετικό αριθμό αν αντιστρέψουμε ένα προς ένα όλα τα ψηφία του.
- Το μηδέν έχει διπλή αναπαράσταση .
(π.χ. σε σχήμα 4-bit θα είναι $(0000)_2$ και $(1111)_2$).
- Ένας αριθμός σε συμπλήρωμα ως προς ένα με n-bits έχει μέγεθος από:
 $-(2^{n-1}-1)$ έως $(2^{n-1}-1)$.



Αναπαράσταση Ακεραίων Συμπληρώματος ως Προς 1 3/3

Κανόνες

Bits	Εύρος: $-(2^{N-1}-1) \dots + (2^{N-1}-1)$			
-----	-----			
8	-127	-0	+0	+127
16	-32,767	-0	+0	+32,767
32	-2,147,483,647	-0	+0	+2,147,483,647

- Το πρώτο αριστερά ψηφίο (bit) δηλώνει το πρόσημο του αριθμού:
0 θετικός, 1: αρνητικός.
- Υπάρχουν δύο μηδενικά,
ένα θετικό (+0 → 00000000) και ένα αρνητικό (-0 → 11111111)
- Ο ακέραιος δυαδικός αριθμός 11110110 μορφής συμπληρώματος ως προς ένα έχει συμπλήρωμα τον δυαδικό 00001001. Ο αριθμός 11110110 αντιστοιχεί στο δεκαδικό -9, δεδομένου ότι το πρώτο αριστερά ψηφίο του είναι το 1 που δηλώνει αρνητικό αριθμό.



Αναπαράσταση ακεραίων συμπληρώματος ως προς 1 Παραδείγματα σε δύο ΗΥ 1/2

Δεκαδικοί	8-bit δέσμευση	16-bit δέσμευση
-----	-----	-----
+7	00000111	0000000000000111
-7	11111000	1111111111111000
+124	01111100	0000000001111100
-124	10000011	1111111100000011
+24,760	υπερχείλιση	0110000010111000
-24,760	υπερχείλιση	1001111101000111

Αποθήκευση του +7 σε 8-bit δέσμευση μνήμης

Αλλαγή του δεκαδικού σε δυαδικό: 7 -> 111

Πρόσθεσε πέντε μηδενικά για να δημιουργηθούν N=8 bits: 00000111

Επειδή ο αριθμός είναι θετικός δεν απαιτείται άλλη αλλαγή: 00000111



Αναπαράσταση ακεραίων συμπληρώματος ως προς 1 Παραδείγματα σε δύο ΗΥ 2/2

Δεκαδικοί	8-bit δέσμευση	16-bit δέσμευση
-----	-----	-----
+7	00000111	0000000000000111
-7	11111000	1111111111111000
+124	01111100	0000000001111100
-124	10000011	1111111100000011
+24,760	υπερχείλιση	0110000010111000
-24,760	υπερχείλιση	1001111101000111

Αποθήκευση του -258 σε 16-bit δέσμευση μνήμης

Αλλαγή του δεκαδικού σε δυαδικό: 258 -> 100000010

Πρόσθεσε επτά μηδενικά για να δημιουργηθούν N=16 bits:

0000000100000010

Επειδή ο αριθμός είναι αρνητικός αντικαθιστώ κάθε bit με το συμπλήρωμά του, οπότε το αποτέλεσμα είναι: 1111111011111101



Αναπαράσταση ακεραίων συμπληρώματος ως προς $1 \frac{1}{2}$

- Το συμπλήρωμα ως προς ένα ισοδυναμεί με την αντιστροφή όλων των bit, ένα προς ένα .
- Το συμπλήρωμα ως προς ένα ενός θετικού αριθμού είναι ο αντίστοιχος αρνητικός αριθμός.
- Το συμπλήρωμα ως προς ένα ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίστοιχος θετικός αριθμός.



Αναπαράσταση ακεραίων συμπληρώματος ως προς 1 2/2

- Το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός αριθμού έχει σαν αποτέλεσμα τον αρχικό αριθμό.
- **Εφαρμογές:**

Η αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα δε χρησιμοποιείτε σήμερα για την αποθήκευση αριθμών στον υπολογιστή.

 - Μειονέκτημα 1: Δυσχέρεια εκτέλεσης στοιχειωδών υπολογισμών.
 - Μειονέκτημα 2: Ύπαρξη δύο μηδενικών.
 - Πλεονέκτημα 1: Βάση για την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 2.
 - Πλεονέκτημα 2: Βολική σε εφαρμογές – ανίχνευση και διόρθωση λαθών.



Αναπαράσταση ακεραίων συμπληρώματος ως προς $2^{1/4}$

- Το συμπλήρωμα ως προς δύο ενός δυαδικού αριθμού A με n δυαδικά ψηφία είναι ο αριθμός $B = 2^n - A$.

$$41 = (00101001)_2$$

$$-41 = 256 - 41 = 215 = (11010111)_2$$

$$41 = (0000000000101001)_2 = (0029)_{16}$$

$$-41 = 2^{16} - 41 = 65495 = (1111111111010111)_2 = (\text{FFD7})_{16}$$

- ✓ Θετικοί αριθμοί (bit 8 = 0): δεν αλλάζει κάτι.
- ✓ Αρνητικοί αριθμοί (bit 8 = 1):
 - Αναστροφή των bit 0 έως bit 7 (αντικατάσταση 0 με 1 και αντίστροφα).
 - Πρόσθεση του 1 στο αποτέλεσμα.



Αναπαράσταση ακεραίων συμπληρώματος ως προς 2 2/4

- Το μηδέν έχει μία αναπαράσταση: (π.χ. σε σχήμα 4-bit θα είναι $(0000)_2$)
- Ένας αριθμός σε μορφή συμπληρώματος ως προς δύο με n-bits έχει μέγεθος:
από $-2^{n-1}-1$ έως $2^{n-1}-1$.
- Εφαρμόζοντας δύο φορές το συμπλήρωμα ως προς δύο 2, παίρνουμε ως αποτέλεσμα τον αρχικό αριθμό.



Αναπαράσταση ακεραίων συμπληρώματος ως προς 2 3/4

Σχήμα bit μήκους 3

Σχήμα bita	Τιμή αναπαράστασης
011	3
010	2
001	1
000	0
111	-1
110	-2
101	-3
100	-4

Σχήμα bit μήκους 4

Σχήμα bit	Τιμή αναπαράστασης
0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
0000	0
1111	-1
1110	-2
1101	-3
1100	-4
1011	-5
1010	-6
1001	-7
1000	-8



Αναπαράσταση ακεραίων συμπληρώματος ως προς $2^4/4$

Κανόνες

Bits	Εύρος: $-2^{N-1} \dots + (2^{N-1}-1)$		
-----	-----		
8	-128	0	+127
16	-32,768	0	+32,767
32	-2,147,483,648	0	+2,147,483,647

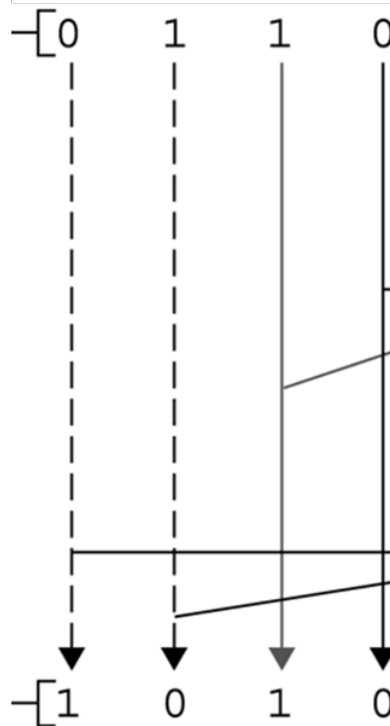
- Το πρώτο αριστερά ψηφίο (bit) δηλώνει το πρόσημο του αριθμού:
0 θετικός, 1: αρνητικός
- Ο ακέραιος δυαδικός αριθμός 11110110 μορφής συμπληρώματος ως προς δύο είναι αρνητικός. Αφήνουμε τα δεξιότερα bit μέχρι το πρώτο 1 (μαζί με αυτό) ως έχουν και αντικαθιστούμε τα υπόλοιπα bits με το συμπλήρωμά τους. Το αποτέλεσμα είναι 00001010. Ο αριθμός είναι ο -10 αφού είναι αρνητικός.



Αλγόριθμος – Παράδειγμα Κωδικοποίησης σε σύστημα συμπληρώματος ως προς 2

Κωδικοποίηση της τιμής -6 σε συμβολισμό συμπληρώματος ως προς 2 με χρήση σχήματος bit 4

Συμβολισμός συμπληρώματος ως προς 2 της τιμής -6 με χρήση σχήματος bit 4



Αντιγραφή των bit από δεξιά προς τα αριστερά μέχρι και το πρώτο 1

Αντικατάσταση των υπολοίπων bit με το συμπλήρωμά τους.

Συμβολισμός συμπληρώματος ως προς 2 της τιμής -6 με χρήση σχήματος bit 4



Πρόσθεση σε σύστημα συμπληρώματος ως προς 2

10-δικό σύστημα		Επίλυση προβλήματος στο συμπλήρωμα ως προς 2		Αποτέλεσμα στο 10-δικο
$\begin{array}{r} 3 \\ + 2 \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{r} 0011 \\ + 0010 \\ \hline 0101 \end{array}$	→	5
$\begin{array}{r} -3 \\ + -2 \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{r} 1101 \\ + 1110 \\ \hline 11011 \end{array}$	→	-5
$\begin{array}{r} 7 \\ + -5 \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{r} 0111 \\ + 1011 \\ \hline 10010 \end{array}$	→	2

διαγράφεται



Αναπαράσταση ακεραίων συμπληρώματος ως προς $2 \frac{1}{2}$

● Εφαρμογές:

Η αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο χρησιμοποιείτε σήμερα για την αποθήκευση αριθμών στον υπολογιστή.

- Πλεονέκτημα 1: Ευχέρεια εκτέλεσης στοιχειωδών υπολογισμών.
- Πλεονέκτημα 2: Ύπαρξη ενός μηδενικού.
- Πλεονέκτημα 3: Βολική σε εφαρμογές – ανίχνευση και διόρθωση λαθών.



Αναπαράσταση ακεραίων συμπληρώματος ως προς 2 2/2

- Παράδειγμα

Σε μορφή συμπληρώματος ως προς δύο, κάντε την πράξη, και κατόπιν μετατρέψτε το αποτέλεσμα στο δεκαδικό. Χρησιμοποιώντας δέσμευση 8 bit μετατρέψτε κάθε έναν από τους επόμενους αριθμούς .

– +17 + 24

– +17 – 24

– – 17 + 24

– – 17 – 23



Συμβολισμός υπέρβασης (πλεονάσματος) 1/6

- Σύστημα υπέρβασης ή πλεονάσματος (excess system):

Η αναπαράσταση σε σύστημα υπέρβασης χρησιμοποιείται σήμερα για την αποθήκευση στον υπολογιστή της εκθετικής τιμής του κλασματικού μέρους ενός αριθμού.

Συμβολισμός υπέρβασης (πλεονάσματος) 2/6

● Κατασκευή

- Επιλέγουμε το μήκος του σχήματος bit που θα χρησιμοποιήσουμε.
- Γράφουμε όλα τα διαφορετικά σχήματα bit που προκύπτουν με τη σειρά εμφάνισης τους στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.
- Επιλέγουμε το σχήμα με σημαντικότερο bit το 1 (εμφανίζεται περίπου στο κέντρο της λίστας) για την αναπαράσταση του μηδενός.
- Αριθμούμε με τη σειρά εμφάνισης τους στη λίστα τα διαφορετικά σχήματα λαμβάνοντας υπόψη ότι τα άνω του μηδενός σχήματα παίρνουν τις θετικές τιμές +1, +2, +3,... και τα κάτω του μηδενός σχήματα τις αρνητικές τιμές -1, -2, -3,



Συμβολισμός υπέρβασης (πλεονάσματος) 3/6

- Η διαφορά μεταξύ των ενός συστήματος υπέρβασης και ενός συστήματος συμπληρώματος ως προς 2 είναι ότι τα bit πρόσημου είναι ανεστραμμένα.

Συμβολισμός υπέρβασης (πλεονάσματος) 4/6

Σύστημα υπέρβασης
σημάτων μήκους 4-bit
(υπέρβαση κατά 8)

Σχήμα 4-bit	Τιμή
1111	7
1110	6
1101	5
1100	4
1011	3
1010	2
1001	1
1000	0
0111	-1
0110	-2
0101	-3
0100	-4
0011	-5
0010	-6
0001	-7
0000	-8

Σύστημα υπέρβασης
σημάτων μήκους 3 bit
(υπέρβαση κατά 4)

Σχήμα 3-bit	Τιμή
111	3
110	2
101	1
100	0
011	-1
010	-2
001	-3
000	-4

Συμβολισμός υπέρβασης (πλεονάσματος) 5/6

- Μετατροπή ενός αριθμού στο σύστημα υπέρβασης ή πλεονάσματος:
 - Επιλέγουμε το μήκος του σχήματος bit που θα χρησιμοποιήσουμε, έστω N .
 - Υπολογίζουμε τον ιδεατό αριθμό 2^{N-1} (πλεόνασμα του 2^{N-1}) ή τον $2^{N-1} - 1$ (πλεόνασμα του $2^{N-1}-1$).
 - Προσθέτουμε τον ιδεατό αριθμό στον ακέραιο.
 - Το αποτέλεσμα μετατρέπεται στο δυαδικό και προστίθενται μηδενικά ώστε να υπάρχουν συνολικά N bits.

Συμβολισμός υπέρβασης (πλεονάσματος) 6/6

● Παράδειγμα

Ο αριθμός -25 με δέσμευση 8 bit μπορεί να αναπαρασταθεί σε σύστημα υπέρβασης ή πλεονάσματος του $2^{N-1} - 1 = 127$ ως εξής:

- Προθέτουμε στον -25 τον 127 και το αποτέλεσμα 102 τον μετατρέπουμε στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης που είναι ο 01100110 (σχήμα 8-bit).
- Ο αριθμός 11111110 μπορεί να αναπαρασταθεί σε σύστημα πλεονάσματος 127 ως ακολούθως:
 - Μετατρέπουμε το δυαδικό αριθμό 11111110 σε δεκαδικό, που είναι ο 254. Από αυτόν αφαιρούμε τον 127 και το αποτέλεσμα που είναι πάλι 127 είναι ο ζητούμενος αριθμός σε σύστημα πλεονάσματος 127.



Αναπαράσταση αριθμών: Κινητή υποδιαστολή (floating point) 1/2

- Αριθμοί σταθερής υποδιαστολής (fixed-point numbers)
- Αριθμοί κινητής υποδιαστολής (floating-point numbers)
- Αριθμός σταθερής υποδιαστολής είναι ο δυαδικός αριθμός που έχει συγκεκριμένο αριθμό ακέραιων και δεκαδικών δυαδικών ψηφίων. Συνήθως συμβολίζεται με $Qa.b$: όπου a ο αριθμός των ακέραιων και b των δεκαδικών ψηφίων
- Κανονικοποίηση: Μεταφορά της υποδιαστολής του αριθμού στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης, έτσι ώστε αριστερά από αυτή να υπάρχει μόνο ένας άσσος.

$$B = b_{n-1} 2^{a-1} + \dots + b_{n-a} 2^0 + b_{n-a-1} 2^{-1} + \dots + b_0 2^{-b} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^{i-b}$$



Αναπαράσταση αριθμών: Κινητή υποδιαστολή (floating point) 2/2

● Παραδείγματα

- $2,625 = (10,101)_2 = 1 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 0,5 + 0 \times 0,25 + 1 \times 0,125$

σε μορφή: Q1.3

- $0,9375 = (0,1111)_2 = 1 \times 0,5 + 1 \times 0,25 + 1 \times 0,125 + 1 \times 0,0625$

σε μορφή: Q0.4

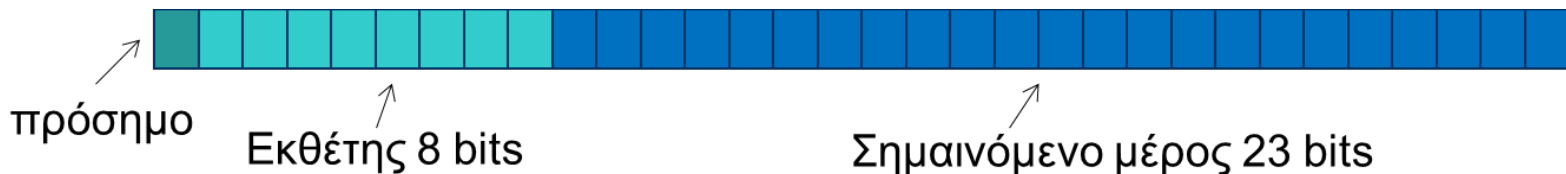
- $(+1010001,11001)_2 \leftarrow 2^6 \times 1,01000111001$

- $(-0,001110011)_2 \leftarrow -2^{-3} \times 1,110011$



Αναπαράσταση αριθμών: Κινητή υποδιαστολή 1/4

- Παραδείγματα πραγματικών αριθμών
 - $34.200.000.000 = 342 \times 10^8 = 0,342 \times 10^{+11}$
 - $0,0000000762 = 762 \times 10^{-10} = 0,762 \times 10^{-7}$
- Και γενικά
- $A = f \times r^e$, όπου
 - A ο αριθμός, f το δεκαδικό μέρος (σημαινόμενο μέρος)
(2-δικός συμπληρώματος ως προς 2 - 23 bits)
 - e ο εκθέτης της βάσης του συστήματος αρίθμησης
(2-δικός σχήματος 8-bit υπέρβασης κατά 127 (πλεονάσματος του 127) (γιατί;))
 - r η βάση του συστήματος αρίθμησης
- **Απλής ακρίβειας (32-bit)**

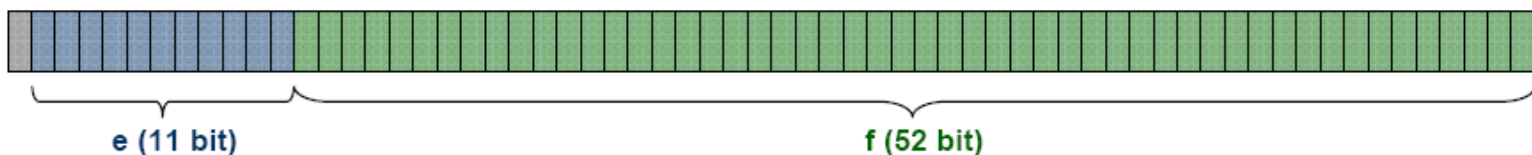




Αναπαράσταση αριθμών: Κινητή υποδιαστολή 2/4

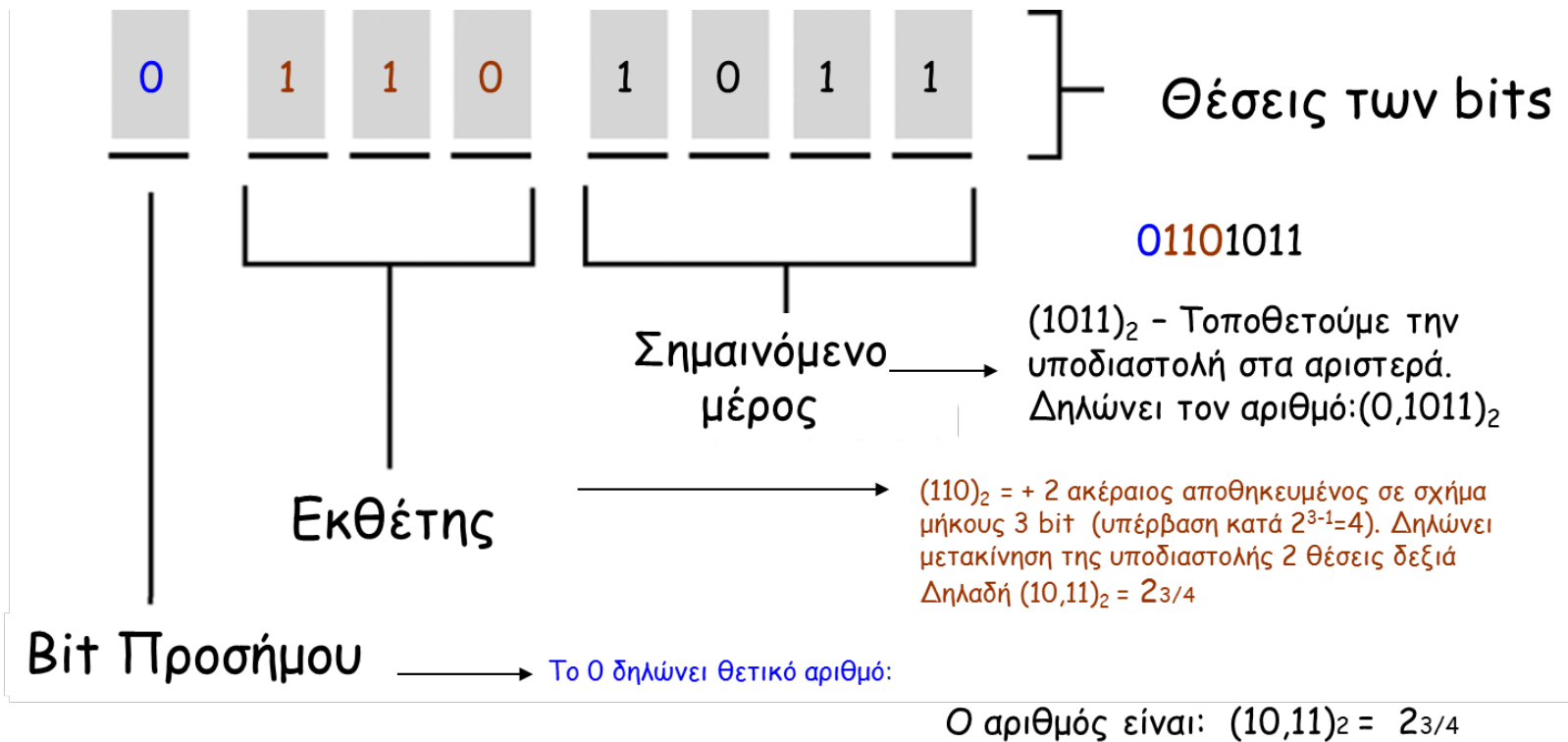
- Παραδείγματα πραγματικών αριθμών
 - $34,200,000,000 = 342 \times 10^8$
 - $0,0000000762 = 7,62 \times 10^{-8} = 762 \times 10^{-10}$
- Και γενικά...
- $A = f \times r^e$, όπου
 - A ο αριθμός, f το δεκαδικό μέρος (σημαινόμενο μέρος)
(2-δικός συμπληρώματος ως προς 2)
 - e ο εκθέτης της βάσης του συστήματος αρίθμησης
(2-δικός σχήματος 11 bit υπέρβασης 1024 (γιατί;))
 - r η βάση του συστήματος αρίθμησης

Διπλής ακρίβειας (64-bit)



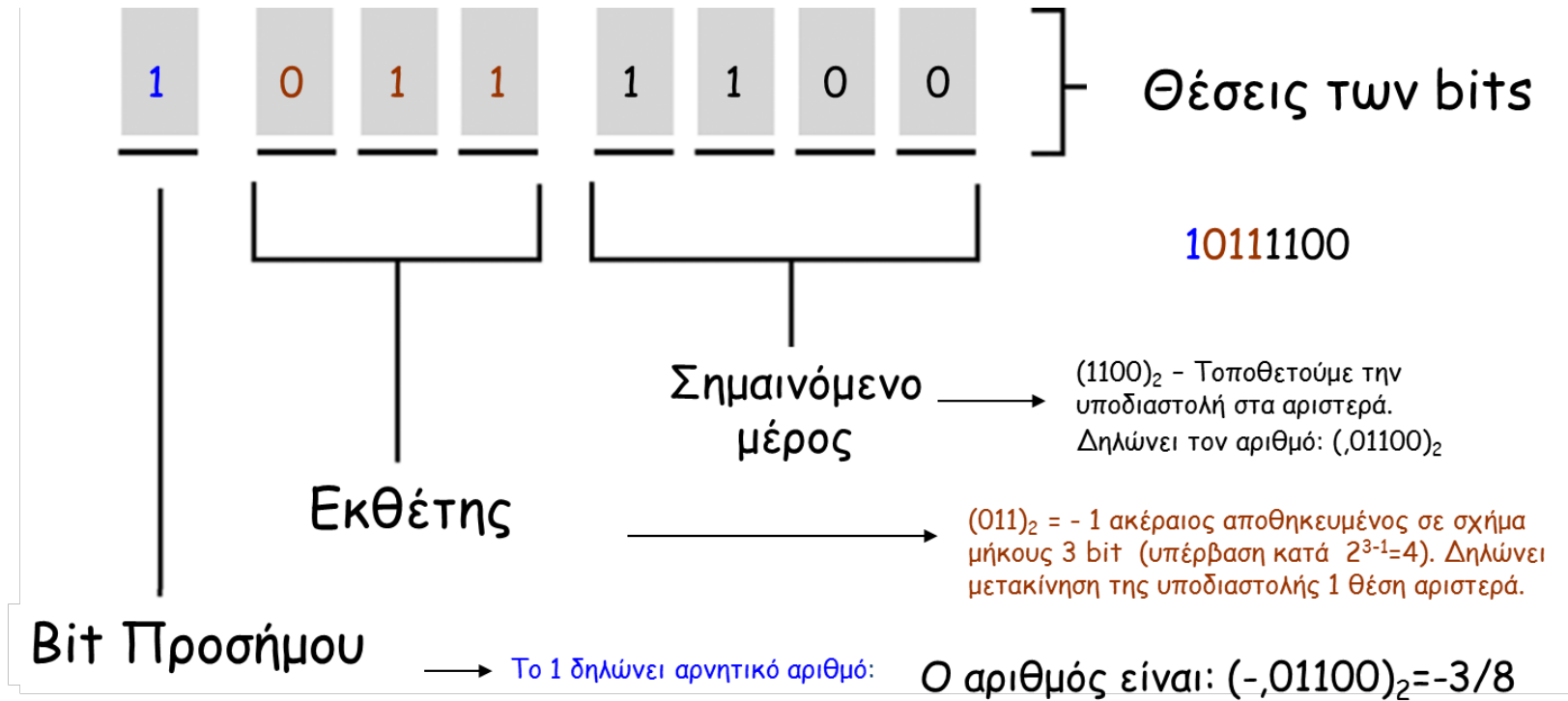


Αναπαράσταση αριθμών: Κινητή υποδιαστολή 4/4





Συστατικά στοιχεία συμβολισμού κινητής υποδιαστολής





Αναπαράσταση αριθμών: Κινητή υποδιαστολή

Άσκηση 1:

Να περιγράψετε τη διαδικασία αποθήκευσης μιας τιμής, έστω του αριθμού $11/8$, χρησιμοποιώντας συμβολισμό κινητής υποδιαστολής αντιστρέφοντας την προηγούμενη διαδικασία.

Υπόδειξη: Απλή εφαρμογή

Άσκηση 2:

Γράψτε ένα πρόγραμμα που να επιδεικνύει το πεπερασμένο της αριθμητικής των υπολογιστών. Πόση μνήμη δεσμεύει ο υπολογιστής για την αποθήκευση πραγματικών αριθμών;

Υπόδειξη: Εφαρμογή `exersice-1.m`



Αναπαράσταση αριθμών: Σφάλματα περικοπής (στρογγύλευσης)

Αποθήκευση της τιμής $25/8$ σε σύστημα κινητής υποδιαστολής ενός byte

Λάθος

$$2_{1/2} + 1/8 + 1/8 =$$

$$2_{5/8} + 1/8 =$$

$$(10,101)_2 + 1/8 =$$

$$(0\ 110\ 1010)_2 + 1/8 =$$

$$(10,10)_2 + 1/8 =$$

$$2_{1/2} + 1/8 =$$

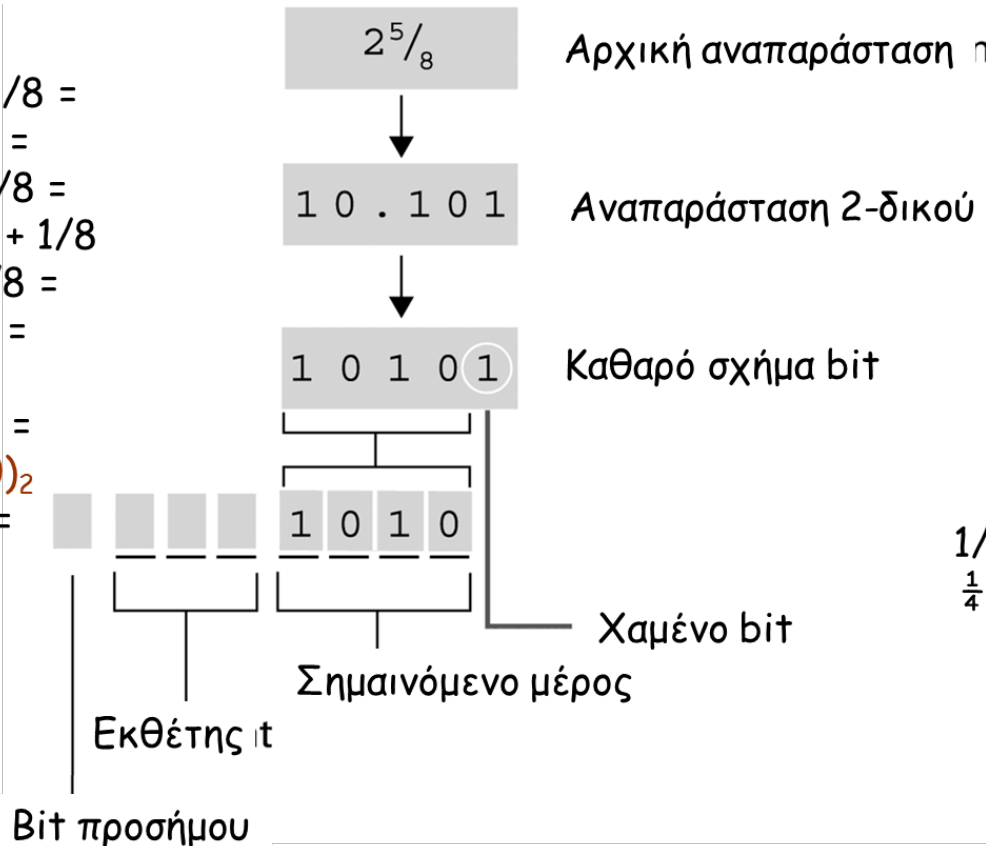
$$2_{5/8} =$$

$$(10,101)_2 =$$

$$(01101010)_2 =$$

$$(10,10)_2 =$$

$$2_{1/2}$$



Σωστό

$$1/8 + 1/8 + 2_{1/2} =$$

$$\frac{1}{4} + 2_{1/2} = 2_{3/4} =$$

$$(01101011)_2$$



Αναπαράσταση αριθμών: Σφάλματα περικοπής 1/2

Αποθήκευση της τιμής $2_{5/8}$ σε σύστημα κινητής υποδιαστολής ενός byte (8 bit)

- *Βήμα 1.* Κωδικοποίηση της τιμής $2_{5/8}$

$$2_{5/8} = 2,625 = (10,101)_2$$

- *Βήμα 2.* Αναπαράσταση της τιμής $2_{5/8}$ ως καθαρό σχήμα bit για τον καθορισμό των bits του σημαινόμενου μέρους

$$(10,101)_2 \rightarrow 10101 \text{ (5 bits)}$$

- *Βήμα 3.* Το πεδίο του εκθέτη είναι 2 ή $(110)_2$ (3 bits)
- *Βήμα 4.* Το πεδίο του πρόσημου είναι + ή $(0)_2$ (1 bits)



Αναπαράσταση αριθμών: Σφάλματα περικοπής 2/2

- Η αποθήκευση της τιμής $2_{5/8}$ σε σύστημα κινητής υποδιαστολής ενός byte είναι αδύνατη γιατί η τιμή απαιτεί 9 bits, δηλαδή 0 110 10101.
- Περικόπτοντας το τελευταίο σημαντικό ψηφίο του καθαρού σχήματος ο αριθμός που αποθηκεύεται είναι ο 0 110 1010**1** που παριστά τον $2_{1/2}$

Αριθμητικές Πράξεις: Δυαδική Πρόσθεση 1/2

- Ακολούθησε τους ίδιους κανόνες όπως στην δεκαδική πρόσθεση με τη διαφορά ότι όταν το άθροισμα είναι 2 (και όχι 10) έχουμε κρατούμενο.
- Νέοι κανόνες κρατουμένου (carry)
 - $0+0 = 0k0$ (άθροισμα 0 με κρατούμενο 0)
 - $0+1 = 1+0 = 1k0$
 - $1+1 = 0k1$
 - $1+1+1 = 1k1$

Κρατούμενο	1	1	1	1	1	
Προσθετέος 1	0	0	1	0	0	1
Προσθετέος 2	0	1	1	1	1	1
Αποτέλεσμα	1	0	1	0	0	0

Αριθμητικές Πράξεις:

Δυαδική Πρόσθεση 2/2

- “Ημιάθροισμα” (δεξιότερο bit, π.χ LSB):

Μόνο 2 bits προσθέτονται, με αποτέλεσμα να υπάρχει ένα ψηφίο του αθροίσματος (το δεξιότερο) και ένα κρατούμενου.
- “Πλήρες Άθροισμα” (υπόλοιπες θέσεις):

3 bits προσθέτονται με αποτέλεσμα ένα άθροισμα (3 ψηφίων) και ένα κρατούμενο.
- Σε μεταγενέστερο στάδιο, θα δούμε πολλές διαφορετικές υλοποιήσεις ημιαθροιστών (half-adders) και αθροιστών (full-adders).



Αθροιστές

Ημιαθροιστής (half-adder)

Είσοδος		Έξοδος	
A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Πλήρης Αθροιστής (full-adder)

Είσοδος			Έξοδος	
Cin	A	B	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



Αριθμητικές Πράξεις: Δυαδική Αφαίρεση

- Νέοι κανόνες δανεικού (borrow)
 - $0-0 = 1-1 = 0δ0$ (αποτέλεσμα 0 με δανεικό 0)
 - $1-0 = 1δ0$
 - $0-1 = 1δ1$
 - ...

Δανεικό	1	1	0	0	
Μειωτέος	1	1	0	1	1
Αφαιρετέος	0	1	1	0	1
Αποτέλεσμα	0	1	1	1	0



Αριθμητικές Πράξεις: Δυαδικός Πολλαπλασιασμός

- Ολίσθηση-και-πρόσθεση (Shift-και-add) Αλγόριθμος, όπως στην βάση-10

Πολλ/στής	0	0	0	1	1	0	1
Πολλ/στέος	0	0	0	0	1	1	0
(1)	0	0	0	0	0	0	0
(2)	0	0	1	1	0	1	0
(3)	0	1	1	0	1	0	0
Άθροισμα	1	0	0	1	1	1	0

Κανόνες

$$0 * 0 = 0$$

$$1 * 0 = 0$$

$$0 * 1 = 0$$

$$1 * 1 = 1$$

- Επαλήθευση: $13 * 6 = 78$



Αριθμητικές Πράξεις: Υπερχείλιση (Overflow)

- **Υπερχείλιση (overflow)** συμβαίνει όταν το μέγεθος της λέξης (word size) είναι n bits και το αποτέλεσμα του αθροίσματος είναι $(n+1)$ bits. Σε αυτή την περίπτωση το αποτέλεσμα δεν μπορεί να αναπαρασταθεί σωστά).
- Υπερχείλιση δεν συμβαίνει στην αφαίρεση.
- $(+127) + (+3) \rightarrow (+130)$

Κρατούμενο	1	1	1	1	1	1	1	1
Προσθετέος 1	0	1	1	1	1	1	1	1
Προσθετέος 2	0	0	0	0	0	0	1	1
Αποτέλεσμα	1	0	0	0	0	0	1	0

Το αποτέλεσμα είναι -126 (συμπλήρωμα ως προς 2) και όχι 130 (γιατί;)



Αριθμητικές Πράξεις: Οι Κανόνες

- Να θυμάστε τους αλγόριθμους που χρησιμοποιούσατε για να εκτελέσετε αριθμητικές λειτουργίες με βάση-10.
- Γενικεύστε τους για την βάση που χρησιμοποιείτε (οι κανόνες κρατούμενο (carry), δανεικό (borrow) αλλάζουν).
- Διατηρήστε τη βάση!
 - Στο δυαδικό, $1+1=10$



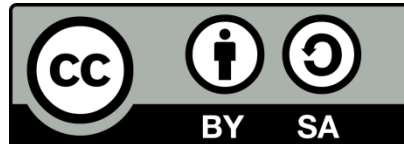
Βιβλιογραφία

- Η Επιστήμη των Υπολογιστών – Μία Ολοκληρωμένη Παρουσίαση (J. Glenn Brookshear) – Μετάφραση Κ. Κουρκουμπέτης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Γεωπονικού Πανεπιστημίου Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





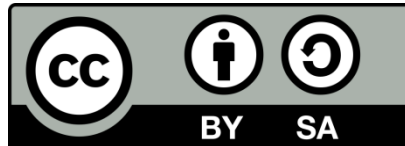
Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών. Τμήμα Αγροτικής Οικονομίας και Ανάπτυξης, Θεόδωρος Τσιλιγκιρίδης, «Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://oceclass.aua.gr/courses/OCDAERD111/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων, π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Η άδεια αυτή ανήκει στις άδειες που ακολουθούν τις προδιαγραφές του Ορισμού Ανοικτής Γνώσης [2], είναι ανοικτό πολιτιστικό έργο [3] και για το λόγο αυτό αποτελεί ανοικτό περιεχόμενο [4].

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

[2] <http://opendefinition.org/okd/ellinika/>

[3] <http://freedomdefined.org/Definition/EI>

[4] <http://opendefinition.org/buttons/>



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.