



ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

# Οικονομετρία

## Αυτοσυσχέτιση

## Συνέπριες και ανίχνευση

Τμήμα: Αγροτικής Οικονομίας & Ανάπτυξης

Διδάσκων: Λαζαρίδης Παναγιώτης



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





# Μαθησιακοί Στόχοι

- Γνώση και κατανόηση του προβλήματος της αυτοσυσχέτισης και των συνεπειών της.
- Γνώση και κατανόηση αλλά και ικανότητα εφαρμογής των της μεθόδου Durbin Watson αλλά και της μεθόδου του πολλαπλασιαστή Lagrange για την ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης.
- Γνώση και κατανόηση της έννοιας της αμιγούς και μη αμιγούς αυτοσυσχέτισης.



# Το πρόβλημα 1/3

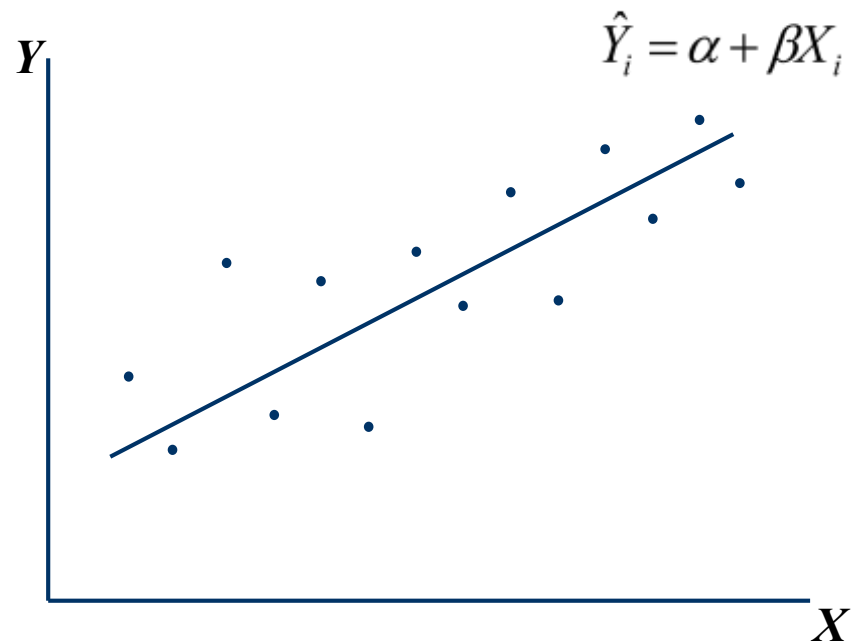
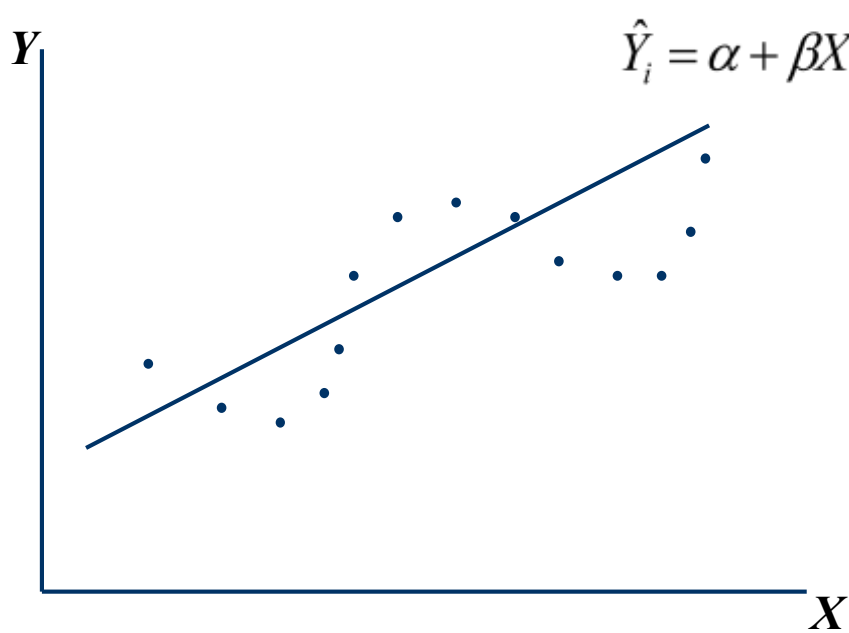
Το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης εμφανίζεται όταν παραβιάζεται η υπόθεση της **μη συσχέτισης των σφαλμάτων**.

$$\text{Δηλαδή} \quad \text{cov}(u_i, u_j) \neq 0 \quad \forall i \neq j$$

Εμφανίζεται όταν η **σειρά** των παρατηρήσεων έχει νόημα (π.χ. χρονολογική σειρά).



# Το πρόβλημα 2/3





# Το πρόβλημα 3/3

## Αυτοσυσχέτιση 1ου βαθμού

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$



Διαδικασία αυτοσυσχέτισης 1ου  
βαθμού  $AR(1)$

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) = 0 \quad \forall s \neq 0$$

$$-1 < \rho < 1$$

**Συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1ου βαθμού**

$\rho > 0$     **Θετική αυτοσυσχέτιση**

$\rho < 0$     **Αρνητική αυτοσυσχέτιση**



# Οι συνέπειες της αυτοσυσχέτισης 1/2

- Οι εκτιμητές που προκύπτουν με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και οι προβλέψεις που βασίζονται σε αυτούς εξακολουθούν να είναι **αμερόληπτοι και συνεπείς**.
- Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δεν δίνει πλέον τους πιο **αποτελεσματικούς** εκτιμητές και προβλέψεις. Υπάρχουν άλλοι αμερόληπτοι εκτιμητές με μικρότερες διακυμάνσεις.



# Οι συνέπειες της αυτοσυσχέτισης 2/2

- Αν μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών περιλαμβάνεται η εξαρτημένη με **χρονική υστέρηση** π.χ.  $Y_{t-1}$ , τότε οι εκτιμητές **δεν είναι ούτε συνεπείς**.
- Οι εκτιμητές των **διακυμάνσεων** των  $\hat{\beta}$  είναι **μεροληπτικοί και ασυνεπείς**. Οι στατιστικοί έλεγχοι που βασίζονται στις διακυμάνσεις αυτές οδηγούν σε **λανθασμένα συμπεράσματα**.



# Ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης

## 1/10

### Διαγραμματική παρουσίαση

Η συνάρτηση εκτιμάται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίζονται τα  $\hat{u}_t$

Κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα όπου στον κάθετο άξονα εμφανίζεται το  $\hat{u}_t$  και στον οριζόντιο ο χρόνος ( $t$ ).

Η μέθοδος αυτή λειτουργεί συμβουλευτικά μόνο.





# Ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης

## 2/10

### Ο έλεγχος Durbin - Watson

Για να χρησιμοποιηθεί πρέπει:

- Να υπάρχει σταθερός όρος ( $\beta_0$ )
- Η υπόθεση που ελέγχεται να αφορά αυτοσυσχέτιση 1<sup>ου</sup> βαθμού
- Να μην υπάρχει ως ανεξάρτητη μεταβλητή η εξαρτημένη με χρονική υστέρηση

● Εκτίμηση της  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$

● Υπολογισμός των  $\hat{u}_i$

● Υπολογισμός της στατιστικής  $d$   
(**Durbin-Watson**)

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^2)}$$



# Ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης

## 3/10

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{u}_t^2 + \sum_{t=2}^n \hat{u}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^2)}$$

Επειδή οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων είναι συνήθως μικροί αριθμοί

$$\sum_{t=2}^n \hat{u}_t^2 \approx \sum_{t=2}^n \hat{u}_{t-1}^2 \approx \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2$$

$$d \approx \frac{2 \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 - 2 \sum_{t=2}^n \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^2)} = 2 \left( 1 - \frac{\sum_{t=2}^n \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^2)} \right) \approx 2 \left( 1 - \frac{\sum_{t=2}^n \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_{t-1}^2)} \right)$$

Επειδή όμως

$$\frac{\sum_{t=2}^n \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_{t-1}^2)} = \hat{\rho}$$

$$d \approx 2(1 - \hat{\rho}) \quad \rightarrow$$



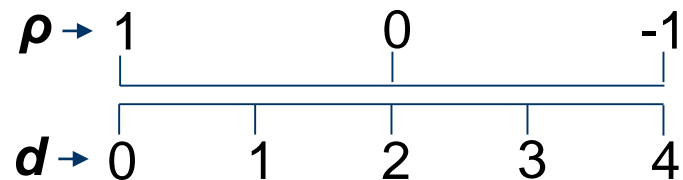
# Ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης

## 4/10

$\hat{\rho} \rightarrow 1$     $d \rightarrow 0$    Θετική αυτοσυσχέτιση

$\hat{\rho} \rightarrow -1$     $d \rightarrow 4$    Αρνητική αυτοσυσχέτιση

$\hat{\rho} \rightarrow 0$     $d \rightarrow 2$    Μηδενική αυτοσυσχέτιση



Διαπιστώνεται ότι όταν το  $d$  ή το  $4-d$  τείνουν στο 0 η πιθανότητα ύπαρξης αυτοσυσχέτισης αυξάνει ενώ όταν το  $d$  ή το  $4-d$  τείνουν στο 2 μειώνεται.



# Ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης

## 5/10

- Όταν  $d < 2$  ελέγχεται η ύπαρξη **θετικής** αυτοσυσχέτισης

$$H_0 : \rho = 0 \quad H_1 : \rho > 0$$

$$d \leq d_L \quad \text{η } H_0 \text{ απορρίπτεται}$$

$$d \geq d_U \quad \text{η } H_0 \text{ δεν απορρίπτεται}$$

$$d_L \leq d \leq d_U \quad \text{Δεν υπάρχει συμπέρασμα}$$

- Όταν  $d > 2$  ελέγχεται η ύπαρξη **αρνητικής** αυτοσυσχέτισης

$$H_0 : \rho = 0 \quad H_1 : \rho < 0$$

$$4 - d \leq d_L \quad \text{η } H_0 \text{ απορρίπτεται}$$

$$4 - d \geq d_U \quad \text{η } H_0 \text{ δεν απορρίπτεται}$$

$$d_L \leq 4 - d \leq d_U \quad \text{Δεν υπάρχει συμπέρασμα}$$



# Ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης

## 6/10

### Μειονεκτήματα της μεθόδου DW

- Είναι δυνατό να δώσει αποτελέσματα που δεν οδηγούν σε συμπεράσματα.
- Δεν είναι κατάλληλη στην περίπτωση που μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών περιλαμβάνεται η εξαρτημένη με χρονική υστέρηση.
- Δεν είναι κατάλληλη όταν η αυτοσυσχέτιση είναι μεγαλύτερου βαθμού.



# Ανίχνευση της αυτοσχέτισης

## 7/10

### Παράδειγμα:

ΕΤΟΣ	Υ	X1	X2	X3	X4	$u_t$	$u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$	$u_t^2$
1	28	340,0	42,2	50,7	78,3	-1,72645			2,98062
2	30	415,0	38,1	52,0	79,2	-2,38287	-1,72645	0,43089	5,67807
3	31	435,0	40,3	54,0	79,2	-0,64980	-2,38287	3,00353	0,42224
4	31	460,0	39,5	55,3	79,2	-1,38241	-0,64980	0,53671	1,91105
5	32	495,0	37,3	54,7	77,4	-1,34694	-1,38241	0,00126	1,81426
6	33	530,0	38,1	63,7	80,2	-2,02506	-1,34694	0,45985	4,10088
7	35	560,0	39,3	69,8	80,4	-0,68188	-2,02506	1,80414	0,46496
8	36	625,0	37,8	65,9	83,9	-0,11024	-0,68188	0,32677	0,01215
9	37	665,0	38,4	64,5	85,5	1,28260	-0,11024	1,94001	1,64507
10	38	720,0	40,1	70,0	93,7	1,29727	1,28260	0,00022	1,68291
11	40	770,0	38,6	73,2	106,1	0,72792	1,29727	0,32416	0,52986
12	40	850,0	39,8	67,8	104,8	2,41150	0,72792	2,83446	5,81535
13	42	915,0	39,7	79,1	114,0	1,20252	2,41150	1,46164	1,44605
14	43	930,0	52,1	95,4	124,1	4,66096	1,20252	11,96083	21,72456
15	42	1020,0	48,9	94,2	127,6	1,74008	4,66096	8,53152	3,02789
16	42	1170,0	58,3	123,5	142,9	-0,68938	1,74008	5,90229	0,47524
17	42	1350,0	57,9	129,9	143,6	-2,57577	-0,68938	3,55846	6,63457
18	44	1450,0	56,5	117,6	139,2	1,33046	-2,57577	15,25864	1,77013
19	46	1575,0	63,7	130,9	165,5	2,06563	1,33046	0,54047	4,26682
20	49	1760,0	61,6	129,8	203,3	0,66698	2,06563	1,95623	0,44486
21	50	2000,0	58,9	128,0	219,6	-1,21375	0,66698	3,53713	1,47319
22	51	2260,0	66,4	141,0	221,6	0,52519	-1,21375	3,02391	0,27583
23	52	2480,0	70,4	168,2	232,6	-3,12657	0,52519	13,33532	9,77541
								80,72842	75,39134

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (\hat{u}_t^2)} = \frac{80,72842}{75,39134} = 1,071$$

Από τους πίνακες για  $n=23$  και  $k-1=4$

$$d_L = 0,99 \quad d_U = 1,79$$

Δεν υπάρχει συμπέρασμα



# Ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης

## 8/10

### Ο έλεγχος του πολλαπλασιαστή Lagrange

Ισοδυναμεί με έλεγχο προσθήκης νέας μεταβλητής ( $\hat{u}_{t-1}$ )

- Εκτίμηση της εξίσωσης  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$
- Υπολογισμός των  $\hat{u}_i$
- Εκτίμηση της εξίσωσης  $\hat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + \dots + \gamma_{k-1} X_{k-1t} + \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$
- Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας του  $\rho$ 
  - Υπολογίζεται η στατιστική  $(n-1)R^2$
  - Η στατιστική αυτή ακολουθεί την κατανομή  $\chi^2$  με 1 βαθμό ελευθερίας (ο αριθμός των περιορισμών,  $\rho=0$ )
  - Αν  $(n-1)R^2 > \chi_{\alpha,1}^2$  απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ( $\rho=0$ )



# Ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης

## 9/10

### Παράδειγμα:

Έτος	$u_t$	X1	X2	X3	X4	$u_{t-1}$
1	-1,72645	340,0	42,2	50,7	78,3	
2	-2,38287	415,0	38,1	52,0	79,2	-1,72645
3	-0,64980	435,0	40,3	54,0	79,2	-2,38287
4	-1,38241	460,0	39,5	55,3	79,2	-0,64980
5	-1,34694	495,0	37,3	54,7	77,4	-1,38241
6	-2,02506	530,0	38,1	63,7	80,2	-1,34694
7	-0,68188	560,0	39,3	69,8	80,4	-2,02506
8	-0,11024	625,0	37,8	65,9	83,9	-0,68188
9	1,28260	665,0	38,4	64,5	85,5	-0,11024
10	1,29727	720,0	40,1	70,0	93,7	1,28260
11	0,72792	770,0	38,6	73,2	106,1	1,29727
12	2,41150	850,0	39,8	67,8	104,8	0,72792
13	1,20252	915,0	39,7	79,1	114,0	2,41150
14	4,66096	930,0	52,1	95,4	124,1	1,20252
15	1,74008	1020,0	48,9	94,2	127,6	4,66096
16	-0,68938	1170,0	58,3	123,5	142,9	1,74008
17	-2,57577	1350,0	57,9	129,9	143,6	-0,68938
18	1,33046	1450,0	56,5	117,6	139,2	-2,57577
19	2,06563	1575,0	63,7	130,9	165,5	1,33046
20	0,66698	1760,0	61,6	129,8	203,3	2,06563
21	-1,21375	2000,0	58,9	128,0	219,6	0,66698
22	0,52519	2260,0	66,4	141,0	221,6	-1,21375
23	-3,12657	2480,0	70,4	168,2	232,6	0,52519

$$\hat{u}_t = -1,595 + 0,008X_{1t} + 0,343X_{2t} - 0,135X_{3t} - 0,086X_{4t} + 0,818\hat{u}_{t-1}$$

$$(n-1)R^2 = 22 \cdot 0,386 = 8,51$$

$$\chi_{0,05,1}^2 = 3,841$$

Απορρίπτεται η υπόθεση  $\rho=0$





# Ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης 10/10

## Αμιγής και μη αμιγής αυτοσυσχέτιση

Η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης μπορεί να οφείλεται σε λαθεμένη εξειδίκευση του υποδείγματος (**μη αμιγής αυτοσυσχέτιση**).

Π.χ. παράλειψη σημαντικής μεταβλητής.

Η ύπαρξη αρνητικής αυτοσυσχέτισης είναι συνήθως ισχυρή ένδειξη μη αμιγούς αυτοσυσχέτισης.



# Βιβλιογραφία

- **«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ. ΜΙΑ ΝΕΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»**

(Τόμοι Α και Β)

J.M. Wooldridge

Εκδόσεις: Παπαζήση

- **«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ»**

(Τόμοι Α & Β)

Γεώργιος Κ. Χρήστου

Εκδόσεις: Gutenberg.



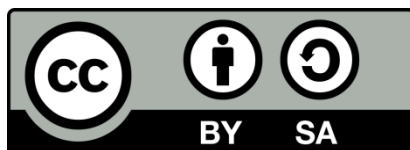
# Λέξεις – έννοιες κλειδιά

- Αυτοσυσχέτιση, αυτοσυσχέτιση 1<sup>ου</sup> βαθμού, θετική αυτοσυσχέτιση, αρνητική αυτοσυσχέτιση, μέθοδος Durbin Watson, μέθοδος πολλαπλασιαστή Lagrange, αμιγής αυτοσυσχέτιση, μη αμιγής αυτοσυσχέτιση.



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Γεωπονικού Πανεπιστημίου Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





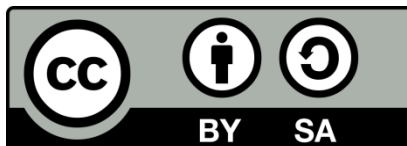
# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών 2014. Τμήμα Αγροτικής Οικονομίας και Ανάπτυξης, Λαζαρίδης Παναγιώτης, «Οικονομετρία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://mediasrv.aua.gr/eclass/courses/OCDAERD102/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων, π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Η άδεια αυτή ανήκει στις άδειες που ακολουθούν τις προδιαγραφές του Ορισμού Ανοικτής Γνώσης [2], είναι ανοικτό πολιτιστικό έργο [3] και για το λόγο αυτό αποτελεί ανοικτό περιεχόμενο [4].

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

[2] <http://opendefinition.org/okd/ellinika/>

[3] <http://freedomdefined.org/Definition/EI>

[4] <http://opendefinition.org/buttons/>



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
  - το Σημείωμα Αδειοδότησης
  - τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
  - το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)
- μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.