



ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

# Οικονομετρία

Ετεροσκεδαστικότητα  
Συνέπειες και ανίχνευση

Τμήμα: Αγροτικής Οικονομίας & Ανάπτυξης

Διδάσκων: Λαζαρίδης Παναγιώτης



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





# Μαθησιακοί Στόχοι

- Γνώση και κατανόηση του προβλήματος της ετεροσκεδαστικότητας και των συνεπειών της.
- Γνώση και κατανόηση αλλά και ικανότητα εφαρμογής των διαφόρων μεθόδων ανίχνευσης της ετεροσκεδαστικότητας.



# Το πρόβλημα 1/3

Το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας εμφανίζεται όταν παραβιάζεται η υπόθεση της **σταθερής διακύμανσης** του όρου σφάλματος.

Δηλαδή δεν ισχύει  $\text{var}(u_i | \mathbf{X}_i) = E(u_i^2 | \mathbf{X}_i) = \sigma^2$

αλλά  $\text{var}(u_i | \mathbf{X}_i) = E(u_i^2 | \mathbf{X}_i) = \sigma_i^2$

και επειδή  $u_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1i})$

$$\text{var}(u_i | \mathbf{X}_i) = \text{var}(Y_i | \mathbf{X}_i) = \sigma_i^2$$



# Το πρόβλημα 2/3

Δηλαδή, η δεσμευμένη διακύμανση της εξαρτημένης μεταβλητής **δεν είναι σταθερή**.

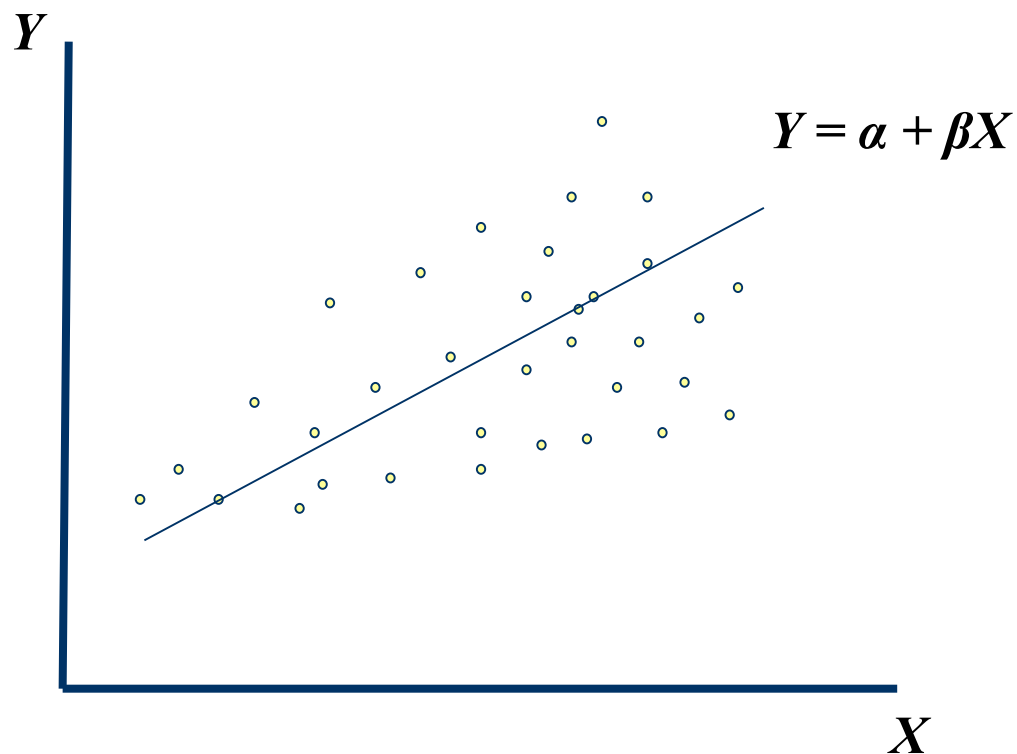
*Δεν θα πρέπει να συγχέεται η δεσμευμένη διακύμανση της  $Y$  με την διακύμανση της  $Y$*

$$\{\text{var}(Y_i|\mathbf{X}_i) = \sigma_i^2\} \quad \{\text{var}(Y) = \sigma_Y^2\}$$



# Το πρόβλημα 3/3

Παράδειγμα:





# Οι συνέπειες της ετεροσκεδαστικότητας

- Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων εξακολουθεί να δίνει **αμερόληπτους** και **συνεπείς** εκτιμητές.
- Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δεν δίνει πλέον τους πιο **αποτελεσματικούς** εκτιμητές. Υπάρχουν άλλοι αμερόληπτοι εκτιμητές με μικρότερες διακυμάνσεις.
- Οι **διακυμάνσεις** των  $\hat{\beta}$  είναι **μεροληπτικές** και **ασυνεπείς**. Οι στατιστικοί έλεγχοι που βασίζονται στις διακυμάνσεις αυτές οδηγούν σε **λάθος συμπεράσματα**.
- Οι **προβλέψεις** που βασίζονται στις εκτιμήτριες αυτές είναι **αμερόληπτες** αλλά **μη αποτελεσματικές**.



# Ανίχνευση ετεροσκεδαστικότητας 1/12

Επειδή πίσω από το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας υπάρχει πολλές φορές το πρόβλημα της **εξειδίκευσης** πρέπει πριν από οποιοδήποτε έλεγχο ετεροσκεδαστικότητας να διασφαλιστεί όσο είναι δυνατό ότι η εξειδίκευση του υποδείγματος είναι η σωστή.

## Διαγραμματικός έλεγχος

Η συνάρτηση εκτιμάται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίζονται τα  $\hat{u}_i^2$  (εκτίμηση της διακύμανσης του  $u$ ).

Κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα διασποράς με τα  $\hat{u}_i^2$  και την μεταβλητή που θεωρούμε ότι προκαλεί την ετεροσκεδαστικότητα.

Η μέθοδος αυτή λειτουργεί συμβουλευτικά μόνο.



# Ανίχνευση ετεροσκεδαστικότητας 2/12

## Έλεγχος Goldfeld - Quant

Αν υπάρχει ομοσκεδαστικότητα τότε η διακύμανση του όρου σφάλματος για ένα υποσύνολο του δείγματος δεν θα πρέπει να διαφέρει στατιστικά από την διακύμανση ενός άλλου υποσυνόλου.

- Επιλέγεται η μεταβλητή η οποία θεωρείται ότι προκαλεί την ετεροσκεδαστικότητα και οι παρατηρήσεις κατατάσσονται κατά αύξουσα τάξη μεγέθους με βάση τις τιμές αυτής της μεταβλητής.
- Από το σύνολο του δείγματος αφαιρούνται  $d$  παρατηρήσεις που βρίσκονται στο κέντρο της κατανομής. Η αρχική συνάρτηση εκτιμάται με βάση τα δύο υποσύνολα του δείγματος που απομένουν μεγέθους  $n_1$  και  $n_2$  ( $n_1 = n_2$ ).





# Ανίχνευση ετεροσκεδαστικότητας 3/12

- Ο αριθμός  $d$  επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό μεταξύ του  $1/3$  και  $1/6$  των παρατηρήσεων και να αφήνει στην κάθε πλευρά του ικανό αριθμό παρατηρήσεων  $(n_1, n_2)$  για να εκτιμηθεί η αρχική συνάρτηση.
- Υπολογίζονται τα  $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$  και η στατιστική  $F$ .

$$F = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} = \frac{ESS_2 / (n_2 - k)}{ESS_1 / (n_1 - k)} \quad (\text{Στον αριθμητή η μεγαλύτερη διακύμανση})$$

Αν  $F > F(\text{πινάκων})$  απορρίπτεται η υπόθεση ομοσκεδαστικότητας



# Ανίχνευση

# ετεροσκεδαστικότητας 4/12

## Παράδειγμα:

Y	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	Y	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
20	63	2	18	42	5
21	83	6	14	38	4
26	75	4	26	87	6
12	40	4	15	46	3
15	65	6	33	70	7
18	37	4	15	62	3
28	84	5	23	83	2
22	87	2	16	45	3
19	89	3	23	50	6
13	39	3	19	26	6
19	74	8	24	80	6
24	78	4	30	76	4
18	46	3	33	83	7
26	83	3	20	49	5
22	60	4	19	43	6
14	27	4	14	41	5
19	62	3	28	45	7
14	30	2	19	28	8
23	51	6	17	42	3
12	72	5	16	41	1

Y	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	Y	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
19	26	6	22	60	4
14	27	4	19	62	3
19	28	8	15	62	3
14	30	2	20	63	2
18	37	4	15	65	6
14	38	4	33	70	7
13	39	3	12	72	5
12	40	4	19	74	8
14	41	5	26	75	4
16	41	1	30	76	4
18	42	5	24	78	4
17	42	3	24	80	6
19	43	6	21	83	6
16	45	3	26	83	3
28	45	7	23	83	2
18	46	3	33	83	7
15	46	3	28	84	5
20	49	5	22	87	2
23	50	6	26	87	6
23	51	6	19	89	3

$$Y = 4,09 + 0,178X_1 + 1,36X_2$$

$$\sum \hat{u}_1^2 = 115,4 \quad \hat{\sigma}_1^2 = 9,61$$

$$F = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} = \frac{34,4}{9,61} = 3,57$$

$$F_{0,05,12,12} = 2,69$$

Η υπόθεση της  
ετεροσκεδαστικότητας  
δεν απορρίπτεται.

$$Y = 14,98 + 0,076X_1 + 0,684X_2$$

$$\sum \hat{u}_2^2 = 412,9 \quad \hat{\sigma}_2^2 = 34,4$$



# Ανίχνευση ετεροσκεδαστικότητας 5/12

## Έλεγχος Park

- Εκτίμηση της

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1i} + u_i$$

- υπολογισμός του

$$\hat{u}_i = Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_{k-1} X_{k-1i})$$

- εκτίμηση της  $\ln(\hat{u}_i^2) = a_0 + a_1 \ln(Z_{1i}) + v_i$



*Πιθανή αιτία ετεροσκεδαστικότητας.  
Μπορεί να είναι ένα από τα  $X$ .*

- Αν  $a_1$  στατιστικά διάφορο του 0 η υπόθεση της ετεροσκεδαστικότητας δεν απορρίπτεται.



# Ανίχνευση

# ετεροσκεδαστικότητας 6/12

## Παράδειγμα:

u	ln(u <sup>2</sup> )	ln(X <sub>1</sub> )	u	ln(u <sup>2</sup> )	ln(X <sub>1</sub> )
1,656	1,008	4,143	-0,1942	-3,2777	3,7377
-4,829	3,149	4,419	-2,4832	1,8191	3,6376
3,593	2,558	4,317	-0,4694	-1,5125	4,4659
-4,803	3,139	3,689	-1,6934	1,0534	3,8286
-7,947	4,146	4,174	8,1817	4,2038	4,2485
1,677	1,034	3,611	-4,2550	2,8962	4,1271
3,082	2,251	4,431	1,4535	0,7479	4,4188
-0,187	-3,354	4,466	-0,5333	-1,2575	3,8067
-4,578	3,042	4,489	2,4544	1,7957	3,9120
-2,573	1,890	3,664	2,2968	1,6630	3,2581
-7,529	4,038	4,304	-1,3487	0,5983	4,3820
1,113	0,214	4,357	7,4329	4,0118	4,3307
1,307	0,535	3,829	6,1004	3,6167	4,4188
3,383	2,437	4,419	0,6851	-0,7564	3,8918
1,995	1,381	4,094	-0,4249	-1,7117	3,7612
-0,722	-0,651	3,296	-4,0341	2,7896	3,7136
-0,255	-2,733	4,127	7,1842	3,9438	3,8067
0,939	-0,126	3,401	-0,1646	-3,6080	3,3322
2,294	1,661	3,932	0,9470	-0,1088	3,7377
-10,997	4,795	4,277	2,2484	1,6204	3,7136

$$\ln(\hat{u}_i^2) = -6,082 + 1,8261 \ln(X_1)$$

(3,814)      (0,949)

$$t = \frac{1,826}{0,949} = 1,924 \quad t_{0,05,38} = 2,02$$

Η υπόθεση  $\alpha_1$  στατιστικά διάφορο του 0 απορρίπτεται (οριακά).

Η υπόθεση της ετεροσκεδαστικότητας απορρίπτεται (οριακά).



# Ανίχνευση ετεροσκεδαστικότητας 7/12

- Οι μέθοδοι Goldfeld – Quant και Park αποδίδουν την ετεροσκεδαστικότητα σε μια μεταβλητή.
- Όμως ή ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας ισοδυναμεί με απόρριψη της

$$H_0 : Var(u|X_1, X_2, \dots, X_{k-1}) = \sigma^2$$

$$\text{ή της } H_0 : E(u^2|X_1, X_2, \dots, X_{k-1}) = E(u^2) = \sigma^2$$

Έλεγχος της  $H_0 \Rightarrow$  Έλεγχος της σχέσης του  $u$   
με τις  $X_1, \dots, X_{k-1}$

Αν διαπιστωθεί σχέση μεταξύ  $u$  και έστω ενός  $X$  η  $H_0$  απορρίπτεται.



# Ανίχνευση ετεροσκεδαστικότητας 8/12

## Έλεγχος Breush-Pagan

- Εκτίμηση της  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1i} + u_i$
- Υπολογισμός  $\hat{u}_i = Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_{k-1} X_{k-1i})$
- Εκτίμηση της  $\hat{u}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 X_{1i} + \delta_2 X_{2i} + \dots + \delta_{k-1} X_{k-1i} + v_i$
- Έλεγχος της  $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{k-1} = 0$



# Ανίχνευση ετεροσκεδαστικότητας 9/12

- Υπολογισμός του  $R_{\hat{u}}^2$

$$F = \frac{R_{(\hat{u}^2)}^2 / (k-1)}{(1 - R_{(\hat{u}^2)}^2) / (n-k)}$$

Η  $H_0$  απορρίπτεται αν  
 $F > F(\text{πινάκων})_{k-1, n-k}$

$$LM = n \cdot R_{(\hat{u}^2)}^2$$

Η  $H_0$  απορρίπτεται αν  
 $LM > X^2(\text{πινάκων})_{k-1}$



# Ανίχνευση

# ετεροσκεδαστικότητας 10/12

## Παράδειγμα:

u	u <sup>2</sup>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	u	u <sup>2</sup>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
1,656	2,741	63	2	-0,194	0,038	42	5
-4,829	23,319	83	6	-2,483	6,166	38	4
3,593	12,910	75	4	-0,469	0,220	87	6
-4,803	23,072	40	4	-1,693	2,868	46	3
-7,947	63,158	65	6	8,182	66,940	70	7
1,677	2,812	37	4	-4,255	18,105	62	3
3,082	9,496	84	5	1,453	2,113	83	2
-0,187	0,035	87	2	-0,533	0,284	45	3
-4,578	20,956	89	3	2,454	6,024	50	6
-2,573	6,619	39	3	2,297	5,275	26	6
-7,529	56,691	74	8	-1,349	1,819	80	6
1,113	1,238	78	4	7,433	55,249	76	4
1,307	1,707	46	3	6,100	37,215	83	7
3,383	11,444	83	3	0,685	0,469	49	5
1,995	3,978	60	4	-0,425	0,181	43	6
-0,722	0,521	27	4	-4,034	16,274	41	5
-0,255	0,065	62	3	7,184	51,613	45	7
0,939	0,882	30	2	-0,165	0,027	28	8
2,294	5,264	51	6	0,947	0,897	42	3
-10,997	120,940	72	5	2,248	5,055	41	1

$$\hat{u}^2 = -28,647 + 0,360X_1 + 5,360X_2$$

$$R^2 = 0,221$$

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = 0$$

$$F = \frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/n-k} = \frac{0,221/2}{(1-0,221)/37} = 5,248$$

$$LM = nR^2 = 40 \cdot 0,221 = 8,84$$

$$F_{0,05,37} = 3,25$$

$$X_{0,05,2}^2 = 5,99$$

Η υπόθεση της ετεροσκεδαστικότητας δεν απορρίπτεται με το κριτήριο  $F$ , απορρίπτεται όμως με το κριτήριο  $X^2$ .





# Ανίχνευση ετεροσκεδαστικότητας 11/12

## Έλεγχος White

- Εκτίμηση της  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1i} + u_i$
- Υπολογισμός  $\hat{u}_i = Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_{k-1} X_{k-1i})$
- Εκτίμηση της  $\hat{u}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 X_{1i} + \delta_2 X_{2i} + \dots + \delta_{k-1} X_{k-1i} + \delta_k X_{1i}^2 + \delta_{k+1} X_{2i}^2 + \dots + \delta_{2k-2} X_{k-1i}^2 + \dots + \delta_{2k-1} X_1 X_2 + \delta_{2k} X_1 X_3 + \dots + v_i$
- Έλεγχος της  $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \dots = 0$
- Υπολογισμός του  $R^2_{(\hat{u}^2)}$

Έλεγχος  $F$

Έλεγχος  $LM$



# Ανίχνευση

# ετεροσκεδαστικότητας 12/12

## Παράδειγμα:

u	u <sup>2</sup>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> <sup>2</sup>	X <sub>2</sub> <sup>2</sup>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>
1,656	2,741	63	2	3969	4	126
-4,829	23,319	83	6	6889	36	498
3,593	12,910	75	4	5625	16	300
-4,803	23,072	40	4	1600	16	160
-7,947	63,158	65	6	4225	36	390
1,677	2,812	37	4	1369	16	148
3,082	9,496	84	5	7056	25	420
-0,187	0,035	87	2	7569	4	174
-4,578	20,956	89	3	7921	9	267
-2,573	6,619	39	3	1521	9	117
-7,529	56,691	74	8	5476	64	592
1,113	1,238	78	4	6084	16	312
1,307	1,707	46	3	2116	9	138
3,383	11,444	83	3	6889	9	249
1,995	3,978	60	4	3600	16	240
-0,722	0,521	27	4	729	16	108
-0,255	0,065	62	3	3844	9	186
0,939	0,882	30	2	900	4	60
2,294	5,264	51	6	2601	36	306
-10,997	120,940	72	5	5184	25	360

u	u <sup>2</sup>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> <sup>2</sup>	X <sub>2</sub> <sup>2</sup>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>
-0,194	0,038	42	5	1764	25	210
-2,483	6,166	38	4	1444	16	152
-0,469	0,220	87	6	7569	36	522
-1,693	2,868	46	3	2116	9	138
8,182	66,940	70	7	4900	49	490
-4,255	18,105	62	3	3844	9	186
1,453	2,113	83	2	6889	4	166
-0,533	0,284	45	3	2025	9	135
2,454	6,024	50	6	2500	36	300
2,297	5,275	26	6	676	36	156
-1,349	1,819	80	6	6400	36	480
7,433	55,249	76	4	5776	16	304
6,100	37,215	83	7	6889	49	581
0,685	0,469	49	5	2401	25	245
-0,425	0,181	43	6	1849	36	258
-4,034	16,274	41	5	1681	25	205
7,184	51,613	45	7	2025	49	315
-0,165	0,027	28	8	784	64	224
0,947	0,897	42	3	1764	9	126
2,248	5,055	41	1	1681	1	41

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0$$

$$F = \frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/n-k} = \frac{0,298/5}{(1-0,298)/34} = 2,886$$

$$LM = nR^2 = 40 \cdot 0,298 = 11,92$$

$$F_{0,05,5,34} = 2,49$$

$$X_{0,05,5}^2 = 11,1$$

Η υπόθεση της ετεροσκεδαστικότητας δεν απορρίπτεται.

$$\hat{u}^2 = -61,42 + 2,349X_1 - 3,416X_2 - 0,019X_1^2 + 0,476X_2^2 + 0,077X_1X_2$$

$$R^2 = 0,298$$



# Βιβλιογραφία

- **«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ. ΜΙΑ ΝΕΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»**

(Τόμοι Α και Β)

J.M. Wooldridge

Εκδόσεις: Παπαζήση

- **«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ»**

(Τόμοι Α & Β)

Γεώργιος Κ. Χρήστου

Εκδόσεις: Gutenberg.



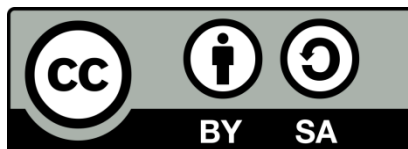
# Λέξεις – έννοιες κλειδιά

- Ετεροσκεδαστικότητα, συνέπειες ετεροσκεδαστικότητας, έλεγχος Goldfeld-Quant, έλεγχος Park, έλεγχος Breush-Pagan, έλεγχος White.



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Γεωπονικού Πανεπιστημίου Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





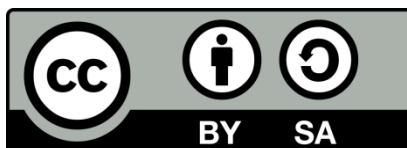
# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών 2014. Τμήμα Αγροτικής Οικονομίας και Ανάπτυξης, Λαζαρίδης Παναγιώτης, «Οικονομετρία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://mediasrv.aua.gr/eclass/courses/OCDAERD102/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων, π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Η άδεια αυτή ανήκει στις άδειες που ακολουθούν τις προδιαγραφές του Ορισμού Ανοικτής Γνώσης [2], είναι ανοικτό πολιτιστικό έργο [3] και για το λόγο αυτό αποτελεί ανοικτό περιεχόμενο [4].

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

[2] <http://opendefinition.org/okd/ellinika/>

[3] <http://freedomdefined.org/Definition/EI>

[4] <http://opendefinition.org/buttons/>





# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
  - το Σημείωμα Αδειοδότησης
  - τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
  - το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)
- μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.