



ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

# Οικονομετρία

## Απλή Παλινδρόμηση Έλεγχοι υποθέσεων και διαστήματα εμπιστοσύνης των συντελεστών

Τμήμα: Αγροτικής Οικονομίας & Ανάπτυξης

Διδάσκων: Λαζαρίδης Παναγιώτης



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





# Μαθησιακοί Στόχοι

- Γνώση και κατανόηση της διαδικασίας ελέγχου υποθέσεων για τους συντελεστές  $\beta_0$  και  $\beta_1$ .
- Γνώση και κατανόηση των εννοιών του σφάλματος τύπου I και II και του ρόλου τους στην διαδικασία ελέγχου υποθέσεων.
- Ικανότητα εφαρμογής της διαδικασίας ελέγχων υποθέσεων.
- Γνώση και κατανόηση της έννοιας του διαστήματος εμπιστοσύνης για τους συντελεστές  $\beta_0$  και  $\beta_1$ .
- Ικανότητα υπολογισμού διαστημάτων εμπιστοσύνης για τους συντελεστές  $\beta_0$  και  $\beta_1$  χρησιμοποιώντας αριθμητικά δεδομένα.



# Έλεγχος υπόθεσης 1/12

- Με βάση τις εκτιμήσεις που προκύπτουν από τα στοιχεία ενός **δείγματος** ελέγχουμε διάφορες **υποθέσεις** που αναφέρονται στις πραγματικές τιμές του **πληθυσμού**.

Παράδειγμα :

$$\text{Αν } \hat{\beta}_i = 2.3$$

μπορεί να ισχύει στον πληθυσμό  $\beta_i = 1$  ?



# Έλεγχος υπόθεσης 2/12

Αν η απόσταση μεταξύ της εκτίμησης και της υποθετικής τιμής είναι μικρή τότε δεν απορρίπτουμε την υπόθεση. Αν η απόσταση είναι μεγάλη την απορρίπτουμε.

- **Διατύπωση της υπόθεσης**
- Πώς μετράμε την απόσταση ?  
Υπολογισμός της κατάλληλης στατιστικής
- **Όρια απόρριψης**



# Έλεγχος υπόθεσης 3/12

**Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση**

Η **μηδενική υπόθεση** ( $H_0$ ) αναφέρεται σε μια τιμή ή σε ένα διάστημα τιμών ενός συντελεστή που συνήθως δεν είναι οι αναμενόμενες.

Η **εναλλακτική υπόθεση** ( $H_1$ ) αναφέρεται στην τιμή ή στο διάστημα τιμών του συντελεστή που ισχύουν αν δεν γίνει αποδεκτή η μηδενική υπόθεση.

Παραδείγματα:  $H_0 : \beta_i \geq 0$        $H_0 : \beta_i = 0$        $H_0 : \beta_i = -1,5$   
 $H_1 : \beta_i < 0$        $H_1 : \beta_i \neq 0$        $H_1 : \beta_i \neq -1,5$



# Έλεγχος υπόθεσης 4/12

Υπολογισμός της κατάλληλης στατιστικής

Μονάδα μέτρησης της απόστασης είναι η τυπική απόκλιση

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S_{\hat{\beta}_i}}$$

Όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος αυτό τόσο μικρότερη είναι η **πιθανότητα** το δείγμα να προέρχεται από τον υποτιθέμενο πληθυσμό

Για τον καθορισμό της πιθανότητας πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή του  $\hat{\beta}_i$



# Έλεγχος υπόθεσης 5/12

Υπόθεση:  $u_i \sim N(0, \sigma^2)$

Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή είναι επίσης τυχαία μεταβλητή με κανονική κατανομή.

- Το  $Y$  ακολουθεί την **κανονική κατανομή** αφού είναι γραμμικός μετασχηματισμός του  $u$ .
- Τα  $\hat{\beta}_0$  και  $\hat{\beta}_1$  και είναι **τυχαίες μεταβλητές** που ακολουθούν την **κανονική κατανομή** αφού είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί του  $Y$ .



# Έλεγχος υπόθεσης 6/12

Αφού  $\hat{\beta}_i \sim N(\beta_i, \sigma_{\hat{\beta}_i}^2)$

$\sigma_{\hat{\beta}_i}^2$  άγνωστο

Στη θέση του χρησιμοποιείται  $S_{\hat{\beta}_i}^2$

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S_{\hat{\beta}_i}} \sim t_{n-2}$$



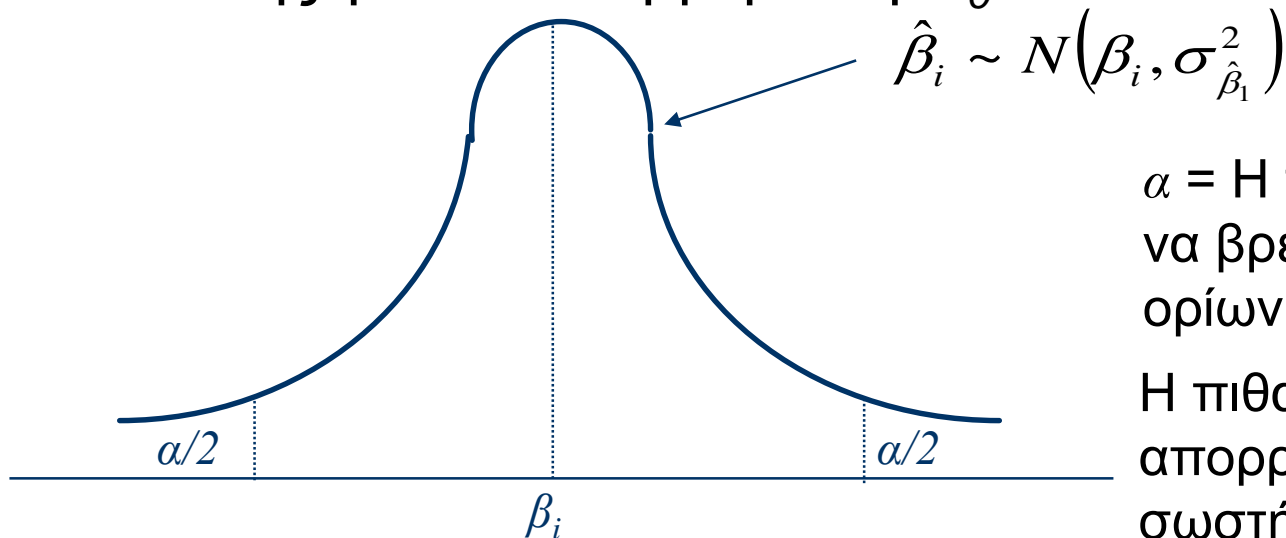


# Έλεγχος υπόθεσης 7/12

## Όρια αποδοχής και απόρριψης

**Περιοχή αποδοχής** : Το απαραίτητο εύρος τιμών της στατιστικής για να γίνει αποδεκτή η  $H_0$

**Περιοχή απόρριψης** : Το απαραίτητο εύρος τιμών της στατιστικής για να απορριφθεί η  $H_0$



$\alpha$  = Η πιθανότητα ένα  $\hat{\beta}_i$  να βρεθεί εκτός ορίων

Η πιθανότητα να απορρίψουμε μια σωστή υπόθεση



# Έλεγχος υπόθεσης 8/12

## Σφάλματα Τύπου I και II

Κάθε έλεγχος έχει ως αποτέλεσμα

### 1. Σωστή απόφαση

- Αποδοχή της ορθής  $H_0$
- Απόρριψη λανθασμένης  $H_0$

### 2. Λανθασμένη απόφαση

- Απόρριψη ορθής  $H_0$   
Σφάλμα Τύπου I  
*π.χ. Ενοχοποίηση αθώου*
- Αποδοχή λανθασμένης  $H_0$   
Σφάλμα Τύπου II  
*π.χ. Αθώωση ενόχου*



# Έλεγχος υπόθεσης 9/12

Κάθε προσπάθεια να μειώσουμε την πιθανότητα του Σφάλματος I συνεπάγεται αύξηση της πιθανότητας του Σφάλματος II και αντίστροφα.

Αν π.χ. απορρίπτουμε πάντα την  $H_0$  για να αποφύγουμε το Σφάλμα II τότε η πιθανότητα του Σφάλματος I γίνεται πολύ μεγάλη

Συνήθως ο ερευνητής καθορίζει την πιθανότητα σφάλματος I την οποία θεωρεί αποδεκτή (π.χ. 5% ,η 1%).

Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται **επίπεδο σημαντικότητας** και συμβολίζεται με  $\alpha$ .

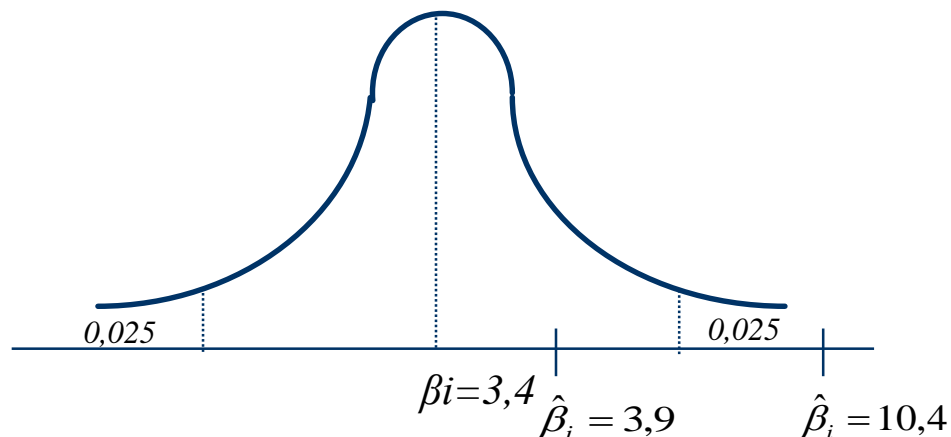


# Έλεγχος υπόθεσης 10/12

Αν  $\alpha=0,05$  η πιθανότητα να απορριφθεί μια σωστή υπόθεση είναι 5%.

Στον δίπλευρο έλεγχο αυτό συνεπάγεται 2,5% στην κάθε πλευρά.

Παράδειγμα: Ένα δείγμα που προέρχεται από πληθυσμό με  $\beta_i=3,4$  μπορεί να δώσει μια εκτίμηση που βρίσκεται μέσα στην περιοχή αποδοχής ή μια εκτίμηση που βρίσκεται μέσα στην περιοχή απόρριψης.



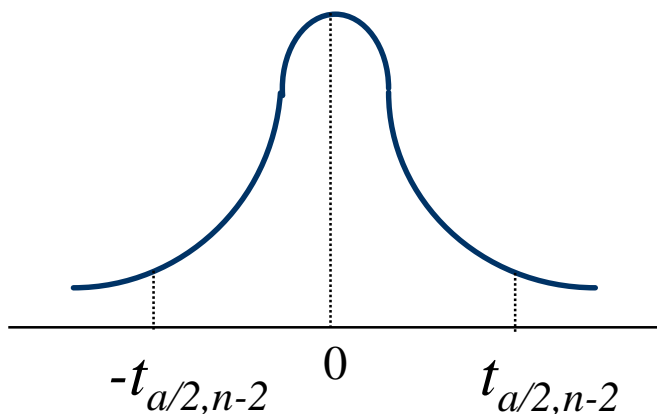
Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε σφάλμα τύπου I



# Έλεγχος υπόθεσης 11/12

## Διαδικασία ελέγχου (Δίπλευρος Έλεγχος)

- Διατυπώνεται η  $H_0$  και η  $H_1$
- Υπολογίζεται  $t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S_{\hat{\beta}_i}}$  [ Η απόσταση της εκτίμησης από την υποθετική τιμή σε μονάδες Τ.Α. ]
- Αποφασίζεται το επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$
- Καθορίζεται το  $t_{\alpha/2, n-2}$  από τον σχετικό πίνακα

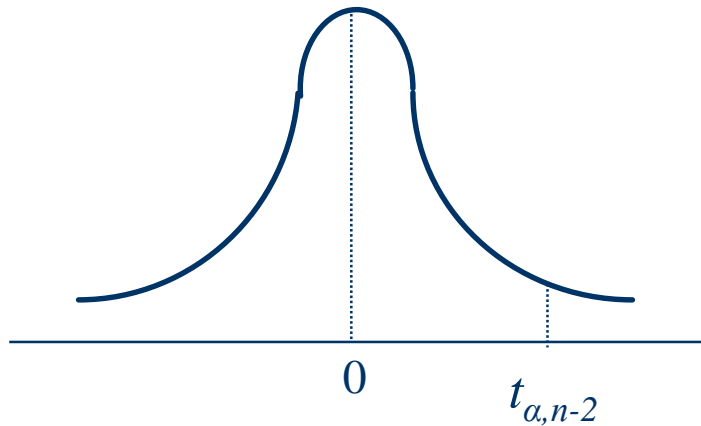


- Αν  $|t| > t_{\alpha/2, n-2}$   
η  $H_0$  απορρίπτεται
- Αν  $|t| \leq t_{\alpha/2, n-2}$   
η  $H_0$  δεν απορρίπτεται



# Έλεγχος υπόθεσης 12/12

## Διαδικασία ελέγχου (Μονόπλευρος Έλεγχος)



$$H_0 : \beta_i \leq 0$$

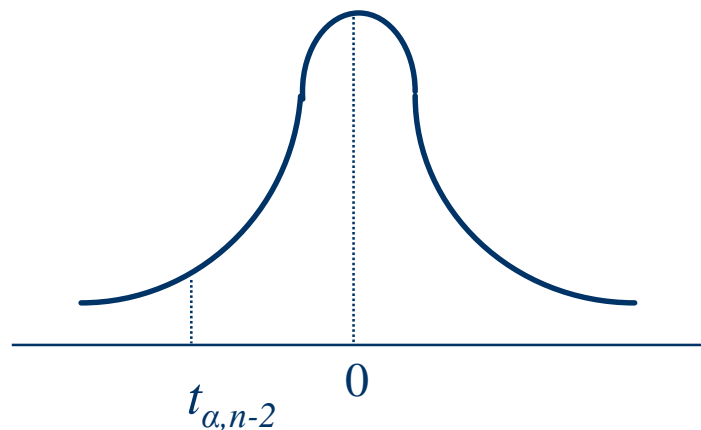
$$\text{Αν } t > t_{\alpha, n-2}$$

$$H_1 : \beta_i > 0$$

η  $H_0$  απορρίπτεται

$$\text{Αν } t \leq t_{\alpha, n-2}$$

η  $H_0$  δεν απορρίπτεται



$$H_0 : \beta_i \geq 0$$

$$\text{Αν } t < -t_{\alpha, n-2}$$

$$H_1 : \beta_i < 0$$

η  $H_0$  απορρίπτεται

$$\text{Αν } t > -t_{\alpha, n-2}$$

η  $H_0$  δεν απορρίπτεται



# Χαρακτηριστικά της κατανομής των εκτιμητών

## Πληθυσμός

## Δείγμα

$$u \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\sigma^2 = E(u_i^2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{n-2}$$

$$\hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, \sigma_{\hat{\beta}_0}^2)$$

$$\sigma_{\hat{\beta}_0}^2 = \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \sigma^2$$

$$S_{\hat{\beta}_0}^2 = \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \hat{\sigma}^2$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma_{\hat{\beta}_1}^2)$$

$$\sigma_{\hat{\beta}_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

$$S_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$



# Στατιστικός έλεγχος του $\beta_0$

$$t_{n-2} = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S_{\hat{\beta}_0}} = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}}$$

Παραδείγματα:  $\hat{Y}_i = -5.333 + 0.7114X_i$

(38.81) (0.221)

$$H_0 : \beta_0 = 0 \quad (\alpha=0.05)$$

$$H_1 : \beta_0 \neq 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S_{\hat{\beta}_0}} = \frac{-5.33 - 0}{38.81} = -0.1374$$

Από τους πίνακες  $t_{0.025/4} = 2.776$

Η υπόθεση  $H_0$  δεν απορρίπτεται

$$H_0 : \beta_0 = 10,2 \quad (\alpha=0.05)$$

$$H_1 : \beta_0 \neq 10,2$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S_{\hat{\beta}_0}} = \frac{-5,333 - 150,2}{38,81} = -4,007$$

Από τους πίνακες  $t_{0.025/4} = 2.776$

Η υπόθεση  $H_0$  απορρίπτεται





# Στατιστικός έλεγχος του $\beta_1$

$$t_{n-2} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

Παραδείγματα:  $\hat{Y}_i = -5.333 + 0.7114X_i$   
(38.81) (0.221)

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.7114 - 0}{0.2207} = 3.222$$

Από τους πίνακες  $t_{0.025/4} = 2.776$   
η υπόθεση  $H_0$  απορρίπτεται

$$H_0 : \beta_1 = 0,95$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0,95$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.7114 - 0,95}{0.2207} = -1,081$$

Από τους πίνακες  $t_{0.025/4} = 2.776$   
η υπόθεση  $H_0$  δεν απορρίπτεται



# Διαστήματα εμπιστοσύνης για το $\beta_0$ και $\beta_1$

$$P(\hat{\beta}_i - S_{\hat{\beta}_i} \cdot t_{\alpha/2, n-2} \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + S_{\hat{\beta}_i} \cdot t_{\alpha/2, n-2}) = 1 - \alpha$$

$$\hat{\beta}_i \pm S_{\hat{\beta}_i} \cdot t_{\alpha/2, n-2}$$

Παραδείγματα:  $\hat{Y}_i = -5.333 + 0.7114X_i$   
(38.81) (0.221)

$$\hat{\beta}_1 - S_{\hat{\beta}_1} \cdot t_{\alpha/2, n-2} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + S_{\hat{\beta}_1} \cdot t_{\alpha/2, n-2}$$

$$0.7114 - 0.2207 \cdot 2.776 \leq \beta_1 \leq 0.7114 + 0.2207 \cdot 2.776$$

$$0.0987 \leq \beta_1 \leq 1.324$$

$$\hat{\beta}_0 - S_{\hat{\beta}_0} \cdot t_{\alpha/2, n-2} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + S_{\hat{\beta}_0} \cdot t_{\alpha/2, n-2}$$

$$-5.33 - 38.81 \cdot 2.776 \leq \beta_0 \leq -5.33 + 38.81 \cdot 2.776$$

$$-113.07 \leq \beta_0 \leq 102.41$$



# Βιβλιογραφία

- **«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ. ΜΙΑ ΝΕΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»**

(Τόμοι Α και Β)

J.M. Wooldridge

Εκδόσεις: Παπαζήση

- **«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ»**

(Τόμοι Α & Β)

Γεώργιος Κ. Χρήστου

Εκδόσεις: Gutenberg.



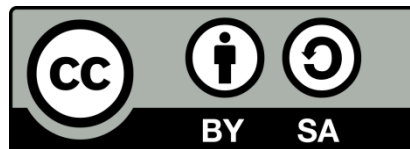
# Λέξεις – έννοιες κλειδιά

- Έλεγχος υπόθεσης, μηδενική και εναλλακτική υπόθεση, περιοχή αποδοχής, περιοχή απόρριψης, σφάλμα τύπου I, σφάλμα τύπου II, επίπεδο σημαντικότητας, μονόπλευρος έλεγχος, δίπλευρος έλεγχος, διάστημα εμπιστοσύνης.



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Γεωπονικού Πανεπιστημίου Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



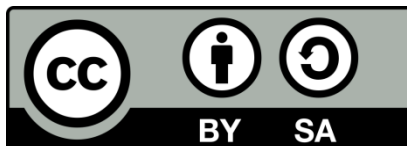
# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών 2014. Τμήμα Αγροτικής Οικονομίας και Ανάπτυξης, Λαζαρίδης Παναγιώτης, «Οικονομετρία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://mediasrv.aua.gr/eclass/courses/OCDAERD102/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων, π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Η άδεια αυτή ανήκει στις άδειες που ακολουθούν τις προδιαγραφές του Ορισμού Ανοικτής Γνώσης [2], είναι ανοικτό πολιτιστικό έργο [3] και για το λόγο αυτό αποτελεί ανοικτό περιεχόμενο [4].

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

[2] <http://opendefinition.org/okd/ellinika/>

[3] <http://freedomdefined.org/Definition/EI>

[4] <http://opendefinition.org/buttons/>





# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
  - το Σημείωμα Αδειοδότησης
  - τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
  - το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)
- μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.