



ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

AGRICULTURAL UNIVERSITY OF ATHENS

Οικονομετρία

Απλή Παλινδρόμηση Πληθυσμός και δείγμα. Η μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Τμήμα: Αγροτικής Οικονομίας & Ανάπτυξης

Διδάσκων: Λαζαρίδης Παναγιώτης



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για το μέλλον
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





Μαθησιακοί Στόχοι

- Γνώση και κατανόηση της σχέσης πληθυσμού και δείγματος στην απλή παλινδρόμηση.
- Γνώση και κατανόηση των εννοιών εκτιμητής και εκτίμηση.
- Γνώση και κατανόηση του τρόπου με τον οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές της απλής γραμμικής παλινδρόμησης με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων.
- Ικανότητα εφαρμογής της μεθόδου των Ε.Τ. χρησιμοποιώντας αριθμητικά δεδομένα.



Πληθυσμός και Δείγμα 1/2

Οι μόνες διαθέσιμες πληροφορίες που έχει συνήθως ο ερευνητής είναι αυτές που προέρχονται από το **δείγμα**

Παράδειγμα:

Y_i	X_i
100	150
112	160
114	170
129	180
115	190
145	200



Πληθυσμός και Δείγμα 2/2

Σκοπός: Η καλύτερη δυνατή προσέγγιση της ευθείας του πληθυσμού

$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ Η εξίσωση της ευθείας που προκύπτει από τα στοιχεία του δείγματος.

\hat{Y}_i Ο εκτιμητής του $E(Y|X_i)$ ή **θεωρητική τιμή** του Y .

$\hat{\beta}_0$ Ο εκτιμητής του β_0

$\hat{\beta}_1$ Ο εκτιμητής του β_1



Εκτιμητής και Εκτίμηση

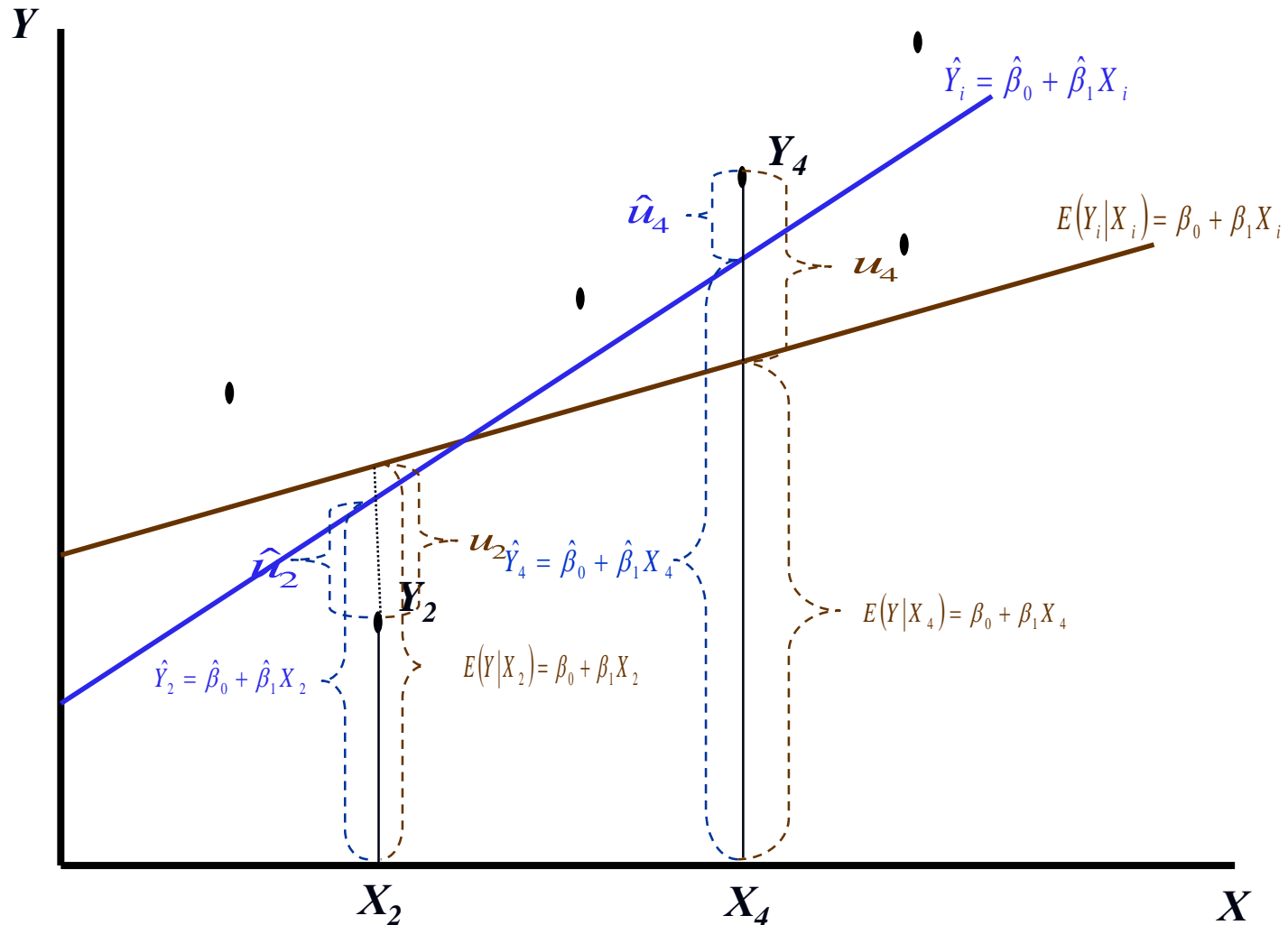
- **Εκτιμητής:** μαθηματικός τύπος που δίνει τον τρόπο εκτίμησης μιας παραμέτρου του πληθυσμού με βάση τα στοιχεία του δείγματος.
- **Εκτίμηση:** Μια συγκεκριμένη τιμή που προκύπτει από την εφαρμογή του τύπου.

$Y_i - \hat{Y}_i = \hat{u}_i$ Ο εκτιμητής του u ή **κατάλοιπο**.

$$\text{έτσι } Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{u}_i$$



Πληθυσμός και Δείγμα





Η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων 1/8

Μια από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της γραμμής παλινδρόμησης.

Είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται περισσότερο επειδή

(α) έχει σημαντικές στατιστικές ιδιότητες

(β) Είναι εύκολη στην εφαρμογή της

Η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων 2/8

Κριτήριο:

Επιλογή των $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ που ελαχιστοποιούν τα τετράγωνα των αποκλίσεων της ευθείας παλινδρόμησης από τις πραγματικές τιμές

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

Η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων 3/8

Ελαχιστοποίηση $\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \rightarrow \frac{\partial \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)(-X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Σύστημα
Κανονικών
Εξισώσεων

Η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων 4/8

Επίλυση κανονικών εξισώσεων

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{vmatrix}} \Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{vmatrix}} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}$$

Η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων 5/8

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2}$$

Η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων 6/8

Παράδειγμα (δείγμα):

	X_i	Y_i	$X_i Y_i$	X_i^2	\hat{Y}_i	\hat{u}_i
	150	100	15000	22500	101,4	-1,4
	160	112	17920	25600	108,5	3,5
	170	114	19380	28900	115,6	-1,6
	180	129	23220	32400	122,8	6,3
	190	115	21850	36100	129,8	-14,8
	200	145	29000	40000	137,0	8,0
Αθροίσματα	1050	715	126370	185500	715,0	0,0
Α. Μέσοι	175	119				

$$\hat{\beta}_1 = \frac{126370 - 6 \cdot 175 \cdot 119}{185500 - 6 \cdot 175^2} = 0.7114$$

$$\hat{\beta}_0 = 119 - 0.7114 \cdot 175 = -5.333$$

$$\hat{Y}_i = -5.333 + 0.7114 X_i$$

$$Y_i = -5.333 + 0.7114 X_i + \hat{u}_i$$

Μια αύξηση του εισοδήματος κατά μια νομισματική μονάδα επιφέρει μια αύξηση στην κατανάλωση κατά 0.7114 νομισματικές μονάδες.

Οριακή Ροπή προς Κατανάλωση = 0.7114.

Η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων 7/8

Παράδειγμα (πληθυσμός):

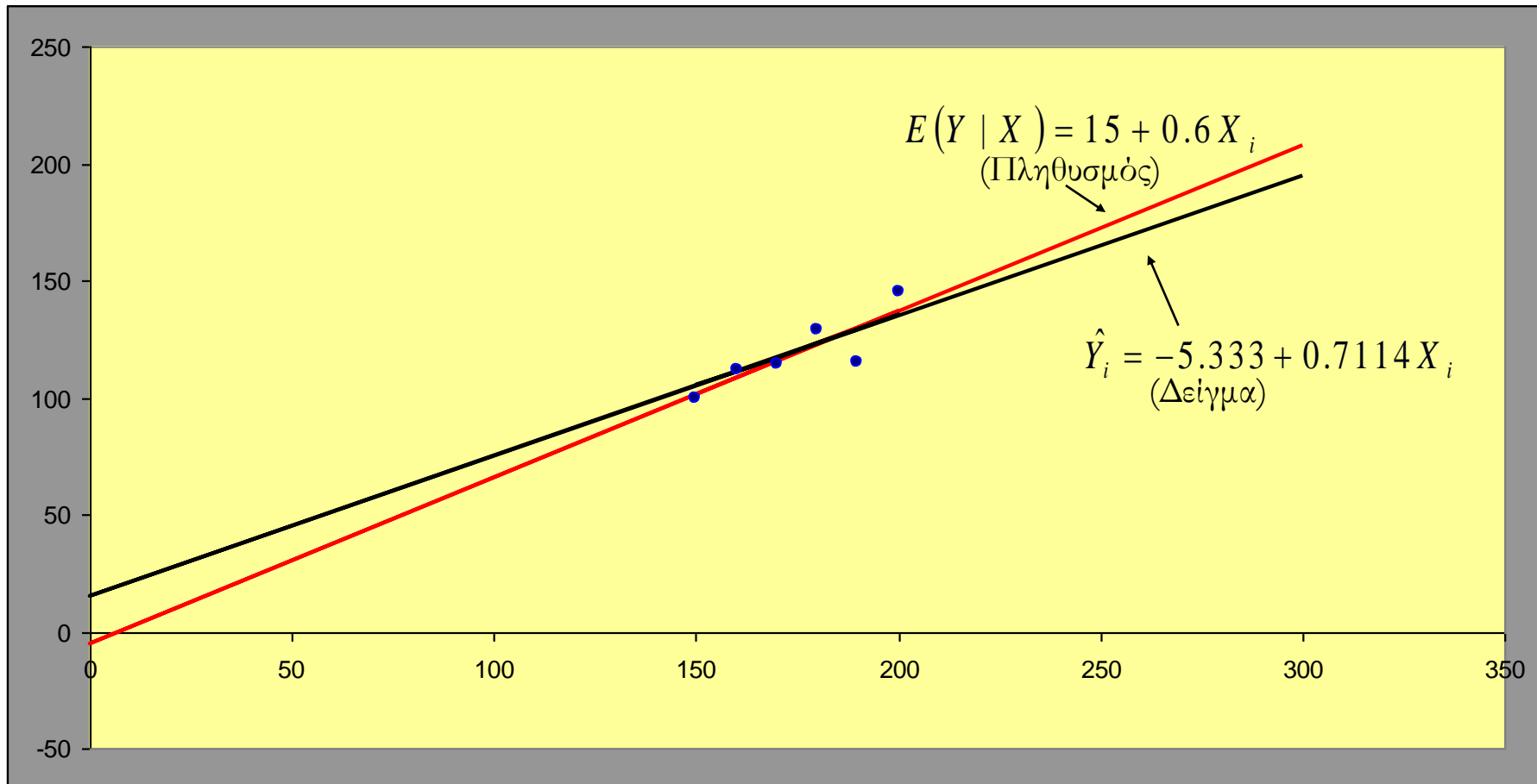
$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2} = \frac{682260 - 32 \cdot 175,625 \cdot 120,375}{996600 - 32 \cdot 30844,14} = 0,6$$

$$\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X} = 120,375 - 0,6 \cdot 175,625 = 15$$

$$E(Y | X) = 15 + 0,6 X_i$$



Η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων 8/8





Βιβλιογραφία 1/2

- **«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ. ΜΙΑ ΝΕΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»**

(Τόμοι Α και Β)

J.M. Wooldridge

Εκδόσεις: Παπαζήση

- **«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ»**

(Τόμοι Α & Β)

Γεώργιος Κ. Χρήστου

Εκδόσεις: Gutenberg.



Βιβλιογραφία 2/2



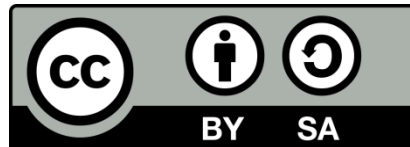
Λέξεις – έννοιες κλειδιά

- Πληθυσμός, δείγμα, εκτιμητής, εκτίμηση, μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων.



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.





Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Γεωπονικού Πανεπιστημίου Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



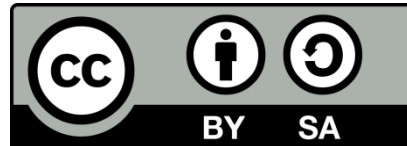
Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών 2014. Τμήμα Αγροτικής Οικονομίας και Ανάπτυξης, Λαζαρίδης Παναγιώτης, «Οικονομετρία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://mediasrv.aua.gr/eclass/courses/OCDAERD102/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων, π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Η άδεια αυτή ανήκει στις άδειες που ακολουθούν τις προδιαγραφές του Ορισμού Ανοικτής Γνώσης [2], είναι ανοικτό πολιτιστικό έργο [3] και για το λόγο αυτό αποτελεί ανοικτό περιεχόμενο [4].

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

[2] <http://opendefinition.org/okd/ellinika/>

[3] <http://freedomdefined.org/Definition/EI>

[4] <http://opendefinition.org/buttons/>



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
 - το Σημείωμα Αδειοδότησης
 - τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
 - το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)
- μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.