Περίληψη μαθημάτων

I. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Με $\mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε **το σύνολο των φυσικών αριθμών**, δηλ.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Με $\mathbb{Z}$ θα συμβολίζουμε **το σύνολο των ακεραίων αριθμών**, δηλ.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}.$$

Με $\mathbb{Q}$ θα συμβολίζουμε **το σύνολο των ρητών αριθμών**, δηλ.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{\alpha}{\beta} : \alpha \in \mathbb{Z}, \text{και } \beta \in \mathbb{N}\}.$$

Θεωρούμε ως γνωστό ότι κάθε ρητός έχει δεκαδική παράσταση που είναι πάντα περιοδική από ένα ψηφίο και μετά. Ισχύει και το αντίστροφο: κάθε δεκαδική παράσταση που από ένα ψηφίο και πέρα είναι περιοδική, αντιστοιχεί σε κάποιο ρητό. Ο λόγος είναι ότι

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111111 \ldots.$$
$$\frac{1}{99} = 0{,}01010101 \ldots.$$
$$\frac{1}{999} = 0{,}001001001001001 \ldots.$$
$$\kappa\lambda\pi.$$

(οπότε $1 = 0{,}999999999 \ldots..$).

Το σύνολο των αριθμών με δεκαδική παράσταση αποτελεί **το σύνολο των πραγματικών αριθμών** που συμβολίζεται $\mathbb{R}$.
Ισχύει ότι δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς εκτός αν η δεκαδική παράσταση έχει από ένα σημείο και πέρα συνεχώς το ψηφίο 9. Στην περίπτωση αυτή ισούται με τον αριθμό με δεκαδική παράσταση που στη θέση του τελευταίου ψηφίου διάφορου του 9 θέσουμε το επόμενο μεγαλύτερο ψηφίο, π.χ.

$$12{,}379999999 \ldots. = 12{,}38$$
$$12{,}3709999999 \ldots. = 12{,}371$$
$$0{,}9999999 \ldots = 1$$
$$0.989999999 \ldots = 0{,}99$$

Ένα υποσύνολο X του $\mathbb{R}$ λέγεται **διάστημα** του $\mathbb{R}$ αν έχει την ιδιότητα:
αν α, β ανήκουν στο X τότε και το $[\alpha, \beta]$ ανήκει στο X.
Αν α, β ανήκουν στο $\mathbb{R}$ τότε: με

$$[\alpha, \beta], (\alpha, \beta), [\alpha, \beta), (\alpha, \beta], (-\infty, +\infty), [\alpha, +\infty), (-\infty, \beta]$$

συμβολίζουμε τα διαστήματα
$\{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq x \leq \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}: \alpha < x < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq x < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}: \alpha < x \leq \beta\}$, $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq x\}$, $\{x \in \mathbb{R}: x \leq \beta\}$, αντίστοιχα.

Αν X και Y είναι σύνολα, τότε **συνάρτηση** $f: X \to Y$ λέμε μία απεικόνιση όπου σε κάθε $x \epsilon X$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο $y \epsilon Y$ που το συμβολίζουμε $f(x)$.
Το X λέγεται **πεδίο ορισμού** της f και το Y **πεδίο τιμών** της f.
Το σύνολο $f(X) = \{f(x): x \in X\} \subseteq Y$ λέγεται **εικόνα της συνάρτησης** f .
Συχνά, όταν θεωρούνται γνωστά τα X και Y, αντί να πούμε η συνάρτηση $f: X \to Y$ λέμε η συνάρτηση f ή $f(x)$ ή $y = f(x)$.

Για μια πιο περιγραφική προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης:
Αν x, y είναι δύο μεταβλητές και η y εξαρτάται από την x τότε γράφουμε $y = y(x)$ και λέμε ότι η y είναι συνάρτηση της x. Ενδέχεται $y = y(x)$ και $x = x(y)$.

Δύο συναρτήσεις $f_1: X_1 \to Y_1$, $f_2: X_2 \to Y_2$, λέγονται **ίσες** αν $X_1 = X_2 = X$ και

$f_1(x) = f_2(x)$ για κάθε $x \in X$, οπότε γράφουμε $f_1 = f_2$.

Αν $A \subseteq X$ και $f: X \to Y$ τότε ορίζουμε την **συνάρτηση *f* περιορισμένη στο *A*** με $f|_A: A \to Y$, όπου $f|_A(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Αν έχουμε δύο συναρτήσεις $g: X \to Y$ και $f: Y \to Z$, τότε ορίζεται η **σύνθετη συνάρτηση** $f \circ g: X \to Z$ που ορίζεται με την ιδιότητα $f \circ g(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in X$.

Η συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται 1-1 (**ένα προς ένα**) όταν έχει την ιδιότητα:
αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

Η συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται **επί** όταν έχει την ιδιότητα:
για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) = y$.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Αν η συνάρτηση $f: X \to Y$ είναι 1-1 τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $\phi: f(X) \to X$ με την ιδιότητα

$$\phi(f(x)) = x \text{ για κάθε } x \in X$$

(ισοδύναμα: $f(\phi(y)) = y$ για κάθε $y \in f(X)$).
Η **αντίστροφη** της f, όταν υπάρχει, συμβολίζεται f^{-1}.

Συχνά την αντίστροφη της $y = f(x)$, όταν υπάρχει, την συμβολίζουμε και $x = f^{-1}(y)$.

Μια συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται **πραγματική** αν $Y \subseteq \mathbb{R}$. Αν $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ τότε λέγεται **πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής**.
Στη συνέχεια όταν θα λέμε συνάρτηση θα εννοούμε πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: X \to \mathbb{R}$ λέμε το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, όπου $x \in X$ *και* $y = f(x)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = ax + b$, όπου a, b σταθερές, είναι μία ευθεία.

Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται **γραμμική** αν είναι της μορφής $f(x) = \alpha x$, όπου α σταθερά.

Θυμίζουμε τα εξής:
Τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, όπου α, β, γ σταθερές με $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, ανήκουν σε μια ευθεία.
Και αντίστροφα, τα σημεία (x, y) μιας ευθείας πρέπει να ικανοποιούν εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, όπου α, β, γ σταθερές με $|\alpha| + |\beta| \neq 0$.
Ως **κλίση της ευθείας** $y = \alpha x + \beta$ ορίζεται η τιμή α.

Μια συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ με $X \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται

- **γνησίως αύξουσα** όταν: $f(x_1) < f(x_2)$ αν $x_1 < x_2$,
- **αύξουσα** όταν: $f(x_1) \leq f(x_2)$ αν $x_1 < x_2$,
- **γνησίως φθίνουσα** όταν: $f(x_2) < f(x_1)$ αν $x_1 < x_2$,
- **φθίνουσα** όταν: $f(x_2) \leq f(x_1)$ αν $x_1 < x_2$.

Μία συνάρτηση λέγεται **μονότονη** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Μια συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \epsilon \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 0$, γνησίως φθίνουσα όταν $\alpha < 0$, **σταθερή** όταν $\alpha = 0$.

Μία συνάρτηση $f(x)$ λέγεται **φραγμένη** αν υπάρχει M ώστε $|f(x)| < M$ για κάθε x.
Μία συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει **τοπικά μέγιστο** στο $x_0 \in X$ αν υπάρχει διάστημα (α, β) με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta) \cap X$.
Μία συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει **τοπικά ελάχιστο** στο $x_0 \in X$ αν υπάρχει διάστημα (α, β) με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta) \cap X$.

Τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ λέγονται τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της *f*.

Μία συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι παίρνει **μέγιστη τιμή** στο $x_0 \in X$ αν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in X$, οπότε το $f(x_0)$ λέγεται **μέγιστη τιμή** της f.
Μία συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι παίρνει **ελάχιστη τιμή** στο $x_0 \in X$ αν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in X$, οπότε το $f(x_0)$ λέγεται **ελάχιστη τιμή** της f.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Η συνάρτηση $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι 1-1, έχει εικόνα το σύνολο των θετικών αριθμών και λέγεται εκθετική συνάρτηση. Η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και έχει την ιδιότητα $e^{x+y} = e^x e^y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Οπότε $e^0 = 1$.
Η αντίστροφή της εκθετικής συνάρτησης είναι η λογαριθμική συνάρτηση $y = lnx$, με $x > 0$. Η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και έχει εικόνα το σύνολο όλων των αριθμών. Έχουμε συνεπώς ότι

$ln(e^x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
$e^{lnx} = x$, για κάθε $x > 0$,
$ln(xy) = lnx + lny$, για κάθε $x, y > 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Η συνάρτηση $y = \varepsilon\varphi x$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι 1-1, αλλά για $x \in(-\pi/2, \pi/2)$ είναι 1-1. Ισχύει δε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in(-\pi/2, \pi/2)$ ώστε $y = \varepsilon\varphi x$. Οπότε υπάρχει η αντίστροφη της $y = \varepsilon\varphi x$, με $x \in(-\pi/2, \pi/2)$, και συμβολίζεται $y = To\xi\varepsilon\varphi x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Οπότε

$$To\xi\varepsilon\varphi(\varepsilon\varphi x) = x, \text{ για κάθε } x \in(-\pi/2, \pi/2), \text{ και}$$
$$\varepsilon\varphi(To\xi\varepsilon\varphi x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μία συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται **περιοδική** αν υπάρχει $T > 0$ ώστε $f(x + T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν το T είναι η μικρότερη δυνατή τιμή με την προηγούμενη ιδιότητα, τότε το T λέγεται **περίοδος** της f.

Θυμίζουμε τις βασικές τριγωνομετρικές ισότητες:

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1,$$
$$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x,$$
$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}, \text{όταν } \sigma\upsilon\nu x \neq 0,$$
$$\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}, \text{όταν } \eta\mu x \neq 0,$$
$$\eta\mu(x + y) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu y,$$
$$\sigma\upsilon\nu(x + y) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y - \eta\mu x \cdot \eta\mu y.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f\colon [2, 5] \to \mathbb{R}$, με $f(x) = -3x + 2$, και να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} εφόσον υπάρχει.
2. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu(5x + 8)$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Αν η συνάρτηση $f\colon X \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, αποδείξτε ότι $f(f^{-1}(y) = y$, για κάθε $y \in f(X)$.
4. Αν $f(x) = x + 1, g(x) = x^2, h(x) = \sqrt{x - 1}$, να βρεθούν οι σύνθετες συναρτήσεις $f\left(g\big(h(x)\big)\right), h\left(g\big(f(x)\big)\right)$ με τα πεδία ορισμού τους.
5. Αν $f(x) = x + 1, g(x) = 2x$, βρείτε (εφόσον υπάρχει) την αντίστροφη $h^{-1}(x)$ της συνάρτησης $h(x) = f(f\big(g(x)\big))$.
6. Εξετάστε αν η $f(x) = x^3 + x + 1,\ x > 0$ έχει αντίστροφη συνάρτηση.
7. Βρείτε σε ακτίνια τη γωνία 75 μοιρών.
8. Να βρεθεί το $\sigma\upsilon\nu x$ όταν $To\xi\varepsilon\varphi x = 2$.

II. ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Στη συνέχεια όταν αναφερόμαστε σε συνάρτηση θα εννοούμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού διάστημα του $\mathbb{R}$.

Έστω $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, με α και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θα λέμε ότι το **όριο** της f(x) είναι λ όταν το x τείνει στο α, και το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lambda,$$

όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $0 < |x - \alpha| < \delta$ τότε $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$.
(*Σημείωση*: υποθέτουμε ότι το α είναι τέτοιο ώστε $\{x \in X: 0 < |x - \alpha| < \delta\} \neq \emptyset$ για κάθε $\delta > 0$.)

Για μια ποιοτική (μη αυστηρή) περιγραφή του ορίου:
Αν έχουμε μια συνάρτηση $f(x)$, και το $f(x)$ τείνει στο λ όταν το x τείνει στο α (συμβολικά: $f(x) \to \lambda$ όταν $x \to \alpha$), τότε λέμε ότι το **όριο** της $f(x)$ είναι λ όταν το x τείνει στο α. Την ιδιότητα αυτή την συμβολίζουμε $\lim_{x \to a} f(x) = \lambda$.

Έστω $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, και $x_0 \in X$. Θα λέμε ότι η $f(x)$ είναι **συνεχής στο x_0** όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Μία συνάρτηση $f: X \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνεχής** αν είναι συνεχής για κάθε $x \in X$.

Για μια διαφορετική ποιοτική προσέγγιση της έννοιας του ορίου και της συνέχειας:
Αν x είναι μία μεταβλητή, τότε με dx συμβολίζουμε την "πολύ μικρή" μεταβολή του x, δηλ. $dx \approx 0$, με $dx \neq 0$. Αν $f(x)$ είναι συνάρτηση, τότε με

$$df(x) = f(x + dx) - f(x)$$

συμβολίζουμε την "πολύ μικρή" μεταβολή της $f(x)$ στη θέση x.
Έτσι, θα έχομε $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lambda$, για $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, όταν $f(\alpha + dx) \approx \lambda$.
Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής όταν $f(x + dx) \approx f(x)$, δηλ. $df(x) \approx 0$, για κάθε x.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Αν η $y = f(x)$ είναι 1-1 και συνεχής τότε και η αντίστροφή της συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ είναι συνεχής.

ΘΕΩΡΗΜΑ (ενδιάμεσης τιμής)
Αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε η εικόνα $f([\alpha, \beta])$ της f περιλαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

Ισχύει κάτι πιο γενικό:

ΘΕΩΡΗΜΑ
Αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε η εικόνα $f([\alpha, \beta])$ της f είναι ένα κλειστό διάστημα $[\xi, \eta]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ (ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων)
Αν οι συναρτήσεις f(x), g(x) είναι συνεχείς τότε είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις

$f(x) + g(x)$, (άθροισμα συναρτήσεων)
$f(x)g(x)$, (γινόμενο συναρτήσεων)
$f(x)/g(x)$, (πηλίκο συναρτήσεων)
$f(g(x))$, (σύνθεση συναρτήσεων)

όταν και όπου αυτές ορίζονται.

Άσκηση
Έστω οι συναρτήσεις $g: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $f: \{g(x): x \in (\alpha, \beta)\} \to \mathbb{R}$. Οπότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ με $f \circ g(x) = f(g(x))$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $g(x), f(x)$ είναι συνεχείς. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής.
Απόδειξη:

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(x) &= (f \circ g)(x + dx) - (f \circ g)(x) \\ &= f\big(g(x + dx)\big) - f\big(g(x)\big) \\ &= f\big(dg(x) + g(x)\big) - f\big(g(x)\big). \end{aligned}$$

Αλλά η $g(x)$ είναι συνεχής, άρα $dg(x) \approx 0$. Οπότε $f\big(dg(x) + g(x)\big) - f\big(g(x)\big) \approx 0$, λόγω συνέχειας της $f(x)$. Δείξαμε ότι $d(f \circ g)(x) \approx 0$, άρα η $f \circ g$ είναι συνεχής.

Άσκηση
Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι συνεχής.
Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} df(x) = f(x + dx) - f(x) = (x + dx)^2 - x^2 &= x^2 + (dx)^2 + 2x \cdot dx - x^2 \\ &= (dx)^2 + 2x \cdot dx \approx 0. \end{aligned}$$

Άρα $df(x) \approx 0$, οπότε η $f(x)$ είναι συνεχής.

Άσκηση
Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής.
Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} df(x) = f(x + dx) - f(x) &= \sigma\upsilon\nu(x + dx) - \sigma\upsilon\nu x \\ &= \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(dx) - \eta\mu x \cdot \eta\mu(dx) - \sigma\upsilon\nu x. \end{aligned}$$

Αλλά παρατηρούμε ότι $\sigma\upsilon\nu(dx) \approx \sigma\upsilon\nu 0 = 1, \eta\mu(dx) \approx dx \approx 0$. Άρα $df(x) \approx 0$, οπότε η $f(x)$ είναι συνεχής.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς

$f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, c σταθερά

$f(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R},\ n \in\ \mathbb{N},$

$f(x) = x^m,\ \mathrm{x} \neq 0,\ m \in \mathbb{Z}$

$f(x) = x^a$, x > 0, $a\ \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

$f(x) = lnx,\ \ x > 0$

$f(x)$ = συν x, $x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ = ημx, $x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ = εφx, $x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ = σφx, $x \in \mathbb{R}$

Ισχύουν δύο περιγραφικές παρατηρήσεις:
α) Μια συνάρτηση είναι συνεχής αν περιγράφεται με έναν ενιαίο μαθηματικό τύπο.
β) Μια συνάρτηση, ορισμένη σε ένα διάστημα, είναι συνεχής αν η γραφική παράστασή της είναι μια συνεχής γραμμή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, αν\ x \geq 0 \\ 1, αν\ x < 0 \end{cases}$$

Δεν είναι συνεχής στο 0 ενώ είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$.

2. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^5 + x^2 + x + 1 = 0$ έχει λύση.

III. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Στη συνέχεια, οι πραγματικές συναρτήσεις που θα θεωρούμε θα ορίζονται σε διαστήματα.

Έστω $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathrm{X}$. Θα λέμε ότι η $f(x)$ είναι **παραγωγίσιμη στο x₀** όταν υπάρχει το πραγματικό όριο $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, οπότε το συμβολίζουμε $f'(x)$ και το λέμε **παράγωγο** της f στο x_0.

Συνηθίζουμε και τον εξής συμβολισμό: $\frac{df}{dx}(x_0)$ αντί $f'(x_0)$.
Μια συνάρτηση $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ λέγεται **παραγωγίσιμη** αν υπάρχει η παράγωγός της για κάθε $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$. Οπότε ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση f' ή $\frac{df}{dx}$.

Σύμφωνα με τον συμβολισμό των dx και $df(x)$,
υπάρχει η παράγωγος $f'(x) \in \mathbb{R}$ της $f(x)$ τότε και μόνο όταν

$$f'(x) \approx \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Όταν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη τότε είναι και συνεχής.
Απόδειξη: Αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη τότε

$$f(x+dx)-f(x) \approx f'(x)dx \approx 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω συνάρτηση $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in X$. Τότε υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, έχει κλίση $f'(x_0)$ και έχει εξίσωση

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0), x \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι $f(x_0+dx)-f(x_0) \approx f'(x_0)dx$. Για $x = x_0+dx$, οπότε $x \approx x_0$, έχουμε $f(x)-f(x_0) \approx f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.
Άρα η ευθεία $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ είναι η πλησιέστερη προς την $f(x)$ όταν $x \approx x_0$.

Άσκηση
Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$, δεν έχει παράγωγο στο σημείο $x = 0$.
Απόδειξη
Αν υπήρχε το $f'(0)$ τότε

$$f'(0) \approx \frac{df(0)}{dx} = \frac{f(0+dx)-f(0)}{dx}.$$

Αν $dx > 0$, τότε $f'(0) \approx \frac{dx}{dx} = 1$,
αν $dx < 0$, τότε $f'(0) \approx \frac{-dx}{dx} = -1$. Άτοπο.

Άσκηση
Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ έχει παράγωγο με $f'(x) = (x^2\,)' = 2x$.
Απόδειξη

$$f'(x) \approx \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2xdx + (dx)^2}{dx} = 2x + dx \approx 2x.$$

Άσκηση
Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει παράγωγο με $f'(x) = -\eta\mu x$.
Απόδειξη

$$\begin{aligned} f'(x) \approx \frac{df(x)}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+dx) - \sigma\upsilon\nu x}{dx} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu dx - \eta\mu x \cdot \eta\mu dx - \sigma\upsilon\nu x}{dx} \approx \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot 1 - \eta\mu x \cdot dx - \sigma\upsilon\nu x}{dx} \\ &= -\eta\mu x. \end{aligned}$$

Έχουμε την εξής περιγραφή για την παραγωγίσιμη συνάρτηση:
Μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη αν η γραφική παράστασή της είναι συνεχής καμπύλη και λεία (δηλ. δεν έχει “γωνίες”).

ΠΡΟΤΑΣΗ (Ιδιότητες παραγώγισης)
Αν οι συναρτήσεις f(x), g(x) είναι παραγωγίσιμες τότε είναι παραγωγίσιμες και οι συναρτήσεις
f(x) + g(x), με (f(x) + g(x))′ = f′(x) + g′(x),
f(x)g(x), με (f(x)g(x))′ = f′(x)g(x) +f(x)g′(x),

f(x)/g(x), με $(\mathrm{f(x)}/\mathrm{g(x)})' = \frac{\mathrm{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)},}{g^2(x)}$, όταν $\mathrm{g(x)} \neq 0$,
$\mathrm{f}(g(x))$, με $\left(\mathrm{f}(g(x))\right)' = \mathrm{f}'(g(x)) \cdot \mathrm{g(x)}$,
όταν και όπου αυτές ορίζονται.

Άσκηση
Έστω οι συναρτήσεις $g: \mathrm{X} \to \mathbb{R}$, $f: Y \to \mathbb{R}$, με $Y \subseteq f(X)$. Οπότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $f\big(g(x)\big)$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $g(x), f(x)$ είναι παραγωγίσιμες. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\big(g(x)\big)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \frac{d\Big(f\big(g(x)\big)\Big)}{dx} &= \frac{f\big(g(x+dx)\big) - f\big(g(x)\big)}{dx} = \\ &= \frac{f\big(g(x) + dg(x)\big) - f\big(g(x)\big)}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Αλλά η $g(x)$ είναι συνεχής, άρα $dg(x) = g(x + dx) - g(x) \approx 0$. Οπότε, λόγω ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ παραγωγίζονται,

$$\frac{d\Big(f\big(g(x)\big)\Big)}{dx} \approx f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^3$.
2. Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$, στο σημείο της που αντιστοιχεί στο $x = 5$.
3. Αν είναι γνωστό ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ έχει $f(5) = 8$ και $f'(5) = 6$, να δώσετε μια πιθανώς καλή προσέγγιση της τιμής $f(5{,}009)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Οι παράγωγοι (ως προς x) των επομένων συναρτήσεων είναι ως εξής:

Αν c σταθερά, $(c)' = 0$,

Αν $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$,

Αν $x \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $(x^m)' = mx^{m-1}$,

Αν $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,

Αν $x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$,

Αν $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,

Αν $x \in \mathbb{R}$, $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$,

Αν $x \in \mathbb{R}$, $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$,

Αν $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$,

Αν $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$,

Αν $x \in \mathbb{R}$, $(\text{Τοξεφ}x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon X \to \mathbb{R}$ είναι:

γνησίως αύξουσα αν $f'(x) > 0$,

αύξουσα αν $f'(x) \geq 0$,

γνησίως φθίνουσα αν $f'(x) < 0$,

φθίνουσα αν $f'(x) \leq 0$,

(πάντα ως προς κάθε x).

Άσκηση.

Δείξτε ότι αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε είναι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Απόδειξη.

Έστω $x_0 \in [\alpha, \beta]$, Έχουμε $f'(x_0) \approx \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$ με $f'(x_0) > 0$.

Οπότε:

αν $dx > 0$, τότε $f(x_0 + dx) - f(x_0) > 0$,

αν $dx < 0$, τότε $f(x_0 + dx) - f(x_0) < 0$.

Συνεπώς, σε μία περιοχή του x_0 η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα είναι γνησίως αύξουσα συνολικά σε όλο το $[\alpha, \beta]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω συνάρτηση $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$.

Κρίσιμα σημεία σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση λέμε τα σημεία του πεδίου ορισμού της που η παράγωγος είναι μηδέν.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f'(\alpha)$ και $f'(\beta)$.

Απόδειξη.

Έστω $f'(\alpha) < \lambda < f'(\beta)$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει x_0 ώστε $f'(x_0) = \lambda$.

(Η περίπτωση όπου $f'(\alpha) > \lambda > f'(\beta)$ είναι ανάλογη.)

Θέτουμε $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$.

Έχουμε ότι η $\varphi(x)$ είναι συνεχής. Άρα η εικόνα της $\varphi(x)$ είναι ένα διάστημα $[\xi, \eta]$.

Έχουμε $\varphi'(\alpha) = f'(\alpha) - \lambda < 0$, άρα σε μία περιοχή του α η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι φθίνουσα. Άρα $\varphi(\alpha + |dx|) < \varphi(\alpha)$, οπότε $\varphi(\alpha) \neq \xi$.

Έχουμε $\varphi'(\beta) = f'(\beta) - \lambda > 0$, άρα σε μία περιοχή του β η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι αύξουσα. Άρα $\varphi(\beta - |dx|) < \varphi(\beta)$, οπότε $\varphi(\beta) \neq \xi$.

Επομένως υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\varphi(x_0) = \xi$. Προφανώς στο x_0 έχουμε ολικό ελάχιστο για την $\varphi(x)$, άρα και τοπικό ελάχιστο. Άρα $\varphi'(x_0) = 0$, δηλ. $f'(x_0) = \lambda$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

Έστω f: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Απόδειξη.

Ας υποθέσουμε ότι $f'(\xi) \neq 0$ για κάθε $\xi \in (\alpha, \beta)$. Θα δείξουμε άτοπο.

Σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση, αν η $f'(x)$ έπαιρνε και θετικές και αρνητικές τιμές, τότε θα έπαιρνε και την τιμή 0. Άρα η $f'(x)$ παίρνει πάντα θετικές τιμές ή πάντα αρνητικές τιμές στο διάστημα (α, β). Αλλά τότε είναι γνησίως αύξουσα η γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α, β). Αυτό οδηγεί σε άτοπο, γιατί $f(\alpha) = f(\beta)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής)
Έστω f: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη. Τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.
Απόδειξη.
Θέτουμε $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$. Έχομε $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, οπότε από το Θεώρημα Rolle έχομε ότι υπάρχει ξ ώστε $\varphi'(\xi) = 0$, δηλ. $f'(x) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ
Έστω f: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη. Τότε
$$df(x) \approx f'(x)dx.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = 0$ για κάθε x.
Τότε $f(x) = c$ για κάθε x, όπου c σταθερά.
Απόδειξη.
Έστω $x \in (\alpha, \beta]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$. Άρα $f(x) - f(\alpha) = 0$, δηλ. $f(x) = f(\alpha)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω $f'(x) = c$, για κάθε x, όπου c σταθερά.
Τότε τα σημεία $(x, f(x))$ ανήκουν σε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία $y = cx$.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και 1-1, με $f'(x) \neq 0$ για κάθε x. Τότε η αντίστροφή της f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ορισμός
Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Άρα υπάρχει η παράγωγος συνάρτηση $f': [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Αν η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη τότε την παράγωγο της $f'(x)$ την συμβολίζουμε $f''(x)$ ή $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$. Η $f''(x)$ λέγεται δεύτερη παράγωγος της $f(x)$.

Σημείωση.
Υποθέτοντας ότι υπάρχει η $f''(x)$ και ότι είναι συνεχής, $dx \approx 0$ και
$$d^2f(x) = d\big(df(x)\big) = d\big(f(x+dx) - f(x)\big) =$$

$$= f(x + dx + dx) - f(x + dx) - (f(x + dx) + f(x)),$$

τότε ισχύει $f''(x) \approx \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Πράγματι:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f(x + dx + dx) - f(x + dx) - f(x + dx) + f(x)}{dx^2} =$$

$$(\lambda ό\gamma\omega\ \tau o\upsilon\ \Theta\varepsilon\omega\rho ή\mu\alpha\tau o\varsigma\ Μέ\sigma\eta\varsigma\ Τ\iota\mu ή\varsigma)$$

$$= \frac{\big(f'(x + dx + \xi_1) - f'(x + \xi_1)\big)dx}{dx^2}\ , ό\pi o\upsilon\ \xi_1\ \mu\varepsilon\tau\alpha\xi ύ\ \tau o\upsilon\ 0\ \kappa\alpha\iota\ \tau o\upsilon\ dx.$$

$$Ά\rho\alpha\ \ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f'(x + dx + \xi_1) - f'(x + \xi_1)}{dx} =$$

$$(\lambda ό\gamma\omega\ \ \tau o\upsilon\ \Theta\varepsilon\omega\rho ή\mu\alpha\tau o\varsigma\ Μέ\sigma\eta\varsigma\ Τ\iota\mu ή\varsigma)$$

$$= f''(x + \xi_2 + \xi_1), ό\pi o\upsilon\ \xi_2\ \mu\varepsilon\tau\alpha\xi ύ\ \tau o\upsilon\ 0\ \kappa\alpha\iota\ \tau o\upsilon\ dx.$$

Άρα $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx f''(x)$, λόγω συνέχειας της $f''(x)$ και του ότι $\xi_2 + \xi_1 \approx 0$.

Ορισμοί

Αν η $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ έχει παράγωγο, τότε:

● αν η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (π.χ. αν $f''(x) > 0$) τότε λέμε ότι η $f(x)$ στρέφει *τα κοίλα προς τα άνω* ή ότι είναι *κυρτή*.

Στη περίπτωση αυτή, η γραφικής παράστασης της $f(x)$ βρίσκεται "πάνω" από κάθε εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

● αν η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα (π.χ. αν $f''(x) < 0$) τότε λέμε ότι η $f(x)$ στρέφει *τα κοίλα προς τα κάτω* ή ότι είναι *κοίλη*.

Στη περίπτωση αυτή, η γραφικής παράστασης της $f(x)$ βρίσκεται "κάτω" από κάθε εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

● αν η $f'(x)$ έχει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο ξ τότε λέμε ότι η $f(x)$ έχει *σημείο καμπής* στο ξ.

Το $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ λέγεται *απροσδιόριστης μορφής* αν $\left|\lim_{x\to\alpha} f(x)\right| = \left|\lim_{x\to\alpha} g(x)\right| = 0$ ή $+\infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κανόνας De L' Hospital)

Αν το $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι απροσδιόριστης μορφής, με τις $f(x), g(x)$ ορισμένες σε ένα διάστημα και παραγωγίσιμες, τότε

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \ \text{ αν } \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda\ .$$

Υπόδειξη.

Θα δώσουμε απόδειξη για μια ειδική περίπτωση.

Υποθέτουμε $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμες, με $f(b) = g(b) = 0$, με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq b$, και $\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Για $x \in (a, b)$, θέτουμε $\Phi(t) = g(t)f(x) - f(t)g(x)$, όπου $t \in [x, b]$, Παρατηρούμε ότι $\Phi(x) = \Phi(b) = 0$.
Συνεπώς, από το Θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (x, b)$ ώστε $\Phi'(\xi) = 0$.
Οπότε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to b} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$.
Άρα

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξτε βάσει του ορισμού ότι

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2.$$

2. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3.$$

3. Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + xe^x$, στο σημείο$(0,0)$.

IV. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Οι συναρτήσεις που θα θεωρούμε στο κεφάλαιο αυτό, υποθέτουμε ότι έχουν πεδίο ορισμού ένα διαστήματα.
Έστω συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού ένα διάστημα. Οι συναρτήσεις για τις οποίες η παράγωγός τους ισούται με $f(x)$ τις λέμε (αόριστο) **ολοκλήρωμα της** $f(x)$ και τις συμβολίζουμε με

$$\int f\,(x)\mathrm{d}x.$$

Αν έχουμε δύο συνάρτηση $F(x), G(x)$ με $F'(x) = G'(x) = f(x)$, για κάθε x, τότε

$$G'(x) - F'(x) = 0 \text{ για κάθε } x.$$

Οπότε $G(x) - F(x) = c$, όπου c σταθερά. Άρα $G(x) = F(x) + c$.
Συνεπώς

$$\int f\,(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

όταν $F'(x) = f(x)$, όπου c τυχούσα σταθερά.

Επειδή

$$\int f'\,(x)\mathrm{d}x = f(x) + c \;\; και$$

$$\left(\int f\,(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

λέμε ότι η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι «αντίστροφες πράξεις».

ΘΕΩΡΗΜΑ
Αν $f(x)$ συνεχής τότε υπάρχει το ολοκλήρωμα της $f(x)$, δηλ. υπάρχει $F(x)$ ώστε $F'(x) = f(x)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Ισχύουν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$\int \alpha\,\mathrm{dx} = \alpha\mathrm{x} + \mathrm{c}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, α σταθερά,

$\int \mathrm{x}^{\mathrm{n}}\,\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{n}+1}}{\mathrm{n}+1} + \mathrm{c}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$,

$\int \mathrm{x}^{\mathrm{m}}\,\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{m}+1}}{\mathrm{m}+1} + \mathrm{c}$, $\mathrm{x} \neq 0$, $\mathrm{m} \in \mathbb{Z}, \mathrm{m} \neq -1$,

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, αν $x > 0$ (ή αν $x < 0$)

$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$, $x > 0$, $a \neq -1$,

$\int e^x \, dx = e^x + c$, $x \in \mathbb{R}$,

$\int$ συνx dx = ημx + c, $x \in \mathbb{R}$,

$\int$ ημx dx = −συνx + c, $x \in \mathbb{R}$,

$\int \frac{1}{1+x^2} dx$ = Τοξεφx + c, $x \in \mathbb{R}$,

$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x + a| + c$, αν $x > -\alpha$ (ή αν $x < -\alpha$).

Για τον ορισμό της συνάρτησης $f(x) = Τοξεφx$, $x \in \mathbb{R}$:
Η συνάρτηση

$$\varphi(x) = \varepsilon\varphi x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

παρατηρούμε ότι είναι 1-1 και έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Άρα η $\varphi(x)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση που την συμβολίζουμε $Τοξεφx$, με $x \in \mathbb{R}$.
Συνεπώς

$$\varepsilon\varphi(Τοξεφx) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση.
Δείξτε ότι $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ = Τοξεφx + c, $x \in \mathbb{R}$.
Απόδειξη.
Έχουμε $\big(\varepsilon\varphi(Τοξεφx)\big)' = (x)' = 1$. Άρα $(\varepsilon\varphi)'(Τοξεφx) \cdot (Τοξεφx)' = 1$. Οπότε $\frac{1}{συν^2(Τοξεφx)} \cdot (Τοξεφx)' = 1$ και $(Τοξεφx)' = συν^2(Τοξεφx)$. Αλλά επειδή $\varepsilon\varphi(Τοξεφx) = x$ έχουμε $\frac{ημ^2(Τοξεφx)}{συν^2(Τοξεφx)} = x^2$ και $\frac{1-συν^2(Τοξεφx)}{συν^2(Τοξεφx)} = x^2$. Η τελευταία ισότητα δίνει $συν^2(Τοξεφx) = \frac{1}{1+x^2}$. Άρα $(Τοξεφx)' = \frac{1}{1+x^2}$ και $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ = Τοξεφx + c.

ΠΡΟΤΑΣΗ (Ιδιότητα ολοκλήρωσης)
Αν οι συναρτήσεις f(x), g(x) είναι συνεχείς με κοινό πεδίο ορισμού και λ, μ σταθερές, τότε $\int \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx$.

ΠΡΟΤΑΣΗ (Κανόνες ολοκλήρωσης)
i) Κανόνας της κατά μέρη ολοκλήρωσης ή κατά παράγοντες ολοκλήρωσης:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

ii) Κανόνας της αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy\text{, όπου } y = g(x).$$

Άσκηση.

Αποδείξτε α) τον Κανόνα της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης και β) τον Κανόνα της αντικατάστασης.

Απόδειξη.

α) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int f(x)g'(x) + f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) + c.$$

Αλλά από τις ιδιότητες της παραγώγισης

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

β) Έστω $\int f(y)dy = F(y) + c$, δηλ. $F'(y) = f(y)$. Άρα πρέπει να δείξουμε ότι $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + c$. Πράγματι. $(F(g(x)))' = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

i) Αν a, b, s, t σταθερές με $s \neq t$ τότε υπάρχουν σταθερές A, B ώστε $\frac{ax+b}{(x-s)(x-t)} = \frac{A}{x-s} + \frac{B}{x-t}$ για κάθε $x \neq s, t$.

ii) Αν a, b, s σταθερές τότε υπάρχουν σταθερές A, B ώστε $\frac{ax+b}{(x-s)^2} = \frac{A}{x-s} + \frac{B}{(x-s)^2}$ για κάθε $x \neq s$.

Παρατήρηση:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{\alpha}\int (ax+b)'f(ax+b)dx = \frac{1}{\alpha}\int f(y)dy$$

όπου $y = ax + b$ (υποθέτουμε $a \neq 0$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:
$\int x\eta\mu x dx$, $\int x\eta\mu x^2 dx$, $\int x\eta\mu(2x)dx$, $\int \frac{1}{x^2-1}dx$, $\int \frac{x}{x^2-1}dx$, $\int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2}dx$.
2. Έστω $\int e^{x^2} = F(x) + c$. Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτηση $\varphi(x) = F(\sigma\upsilon\nu x)$ στο σημείο $x = \pi/4$.

3. Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \ \alpha\nu \ x < 0 \\ \beta \ \alpha\nu \ x = 0 \\ \gamma \ \alpha\nu \ x > 0 \end{cases}$$

όπου α, β, γ σταθερές, με $\alpha \neq \gamma$. Υπάρχει το ολοκλήρωμα της $f(x)$;

Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Έστω μία <u>συνεχής</u> f: [α, β] $\to \mathbb{R}$. Το διάστημα το χωρίζουμε σε ίσα τμήματα μήκους dx και από κάθε ένα παίρνουμε ένα σημείο x_k, k = 1, 2,…, n, όπου n = (b – a)/ dx,

Θέτουμε $S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)dx$. <u>Αποδεικνύεται</u> ότι το S προσεγγίζει έναν πραγματικό αριθμό, όσο το dx προσεγγίζει το 0, που είναι ανεξάρτητος από τον τρόπο επιλογής των x_k, συμβολίζεται με $\int_\beta^\alpha f(x)dx$ και λέγεται (ορισμένο) **ολοκλήρωμα** της *f(x)* στο διάστημα [α, β].

Το $\int_\beta^\alpha f(x)dx$ ισούται με

το εμβαδόν του χωρίου $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq y \leq f(x)\}$
μείον το εμβαδόν του χωρίου $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \alpha \leq x \leq \beta, f(x) \leq y \leq 0\}$,

δηλ.:
το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται
“πάνω από τον άξονα των x και κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$*”*
μείον το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται
“κάτω από τον άξονα των x και πάνω από την καμπύλη $y = f(x)$”.

Ορίζουμε

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Περιγραφικά:
Έστω f: [α, β] $\to \mathbb{R}$ συνεχής. Μπορούμε σε ένα διάστημα μήκους dx εντός του [α, β] να πάρουμε σημείο x και να θεωρήσουμε το γινόμενο $f(x)dx$. Αν το διάστημα [α, β] το χωρίσουμε σε ίσα τμήματα μήκους dx και για κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά θεωρήσουμε το αντίστοιχο $f(x)dx$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx \text{"άθροισμα όλων των } f(x)dx\text{"}.$$

(Η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο πιο μικρό είναι το dx.)

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)
Έστω f: [α, β] $\to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε

$$\int_{a}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha),$$

όταν

$$\int f(t)dt = F(x) + c\ .$$

Απόδειξη
Για $x \in [\alpha, \beta]$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$\varphi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt.$$

Τότε

$$\varphi'(x) \approx \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi(x+dx) - \varphi(x)}{dx} = \frac{\int_a^{x+dx} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{dx} = \frac{\int_x^{x+dx} f(t)dt}{dx} \approx \frac{f(x)dx}{dx} = f(x).$$

Άρα

$$\int f(t)dt = \varphi(x) + c$$

Αλλά $F'(x) = f(x)$. Οπότε $F'(x) = \varphi'(x)$. Συνεπώς $\varphi(x) = F(x) + c_0$.
Επειδή $\varphi(\alpha) = 0$, έχουμε $\varphi(x) = F(x) - F(\alpha)$.
Συνεπώς

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(\alpha), \text{άρα} \int_{a}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω f: [α, β] → $\mathbb{R}$ συνεχής και $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Τότε

$$\int_{a}^{\beta} f(x)dx = \int_{a}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx\ .$$

Δίνουμε στη συνέχεια τον ορισμό των συναρτήσεων $\boldsymbol{lnx\ και\ e^x}$ καθώς και τις βασικές ιδιότητές τους:

Ορίζουμε για $x > 0$

$$lnx = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Παρατηρούμε ότι για $\alpha > 0$ και $x > 0$:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{\alpha x}(\alpha x)'dx = \int \frac{1}{y}dy = lny + c = \ln(\alpha x) + c.$$

Άρα

$$lnx = ln(\alpha x) + c$$

Επειδή $ln1 = 0$, πρέπει $c = -ln\alpha$, οπότε

$$ln(\alpha x) = lna + lnx.$$

Επειδή η συνάρτηση lnx είναι γνησίως αύξουσα, είναι $1-1$, οπότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση και τη συμβολίζουμε e^x.
Το πεδίο τιμών της lnx είναι όλο το $\mathbb{R}$. Οπότε

$$e^{lnx} = x \text{ για κάθε } x > 0, \text{και}$$

$$\ln(e^x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν ρ, σ θετικοί, ώστε $\alpha = ln\rho$, $\beta = ln\sigma$.
Συνεπώς

$$e^{\alpha+\beta} = e^{ln\rho + ln\sigma} = e^{\ln(\rho\sigma)} = \rho\sigma = e^{\alpha}e^{\beta}.$$

Επειδή $(lnx)' = 1/x \neq 0$, η αντίστροφη συνάρτηση της lnx, δηλ. η e^x, είναι παραγωγίσιμη. Επειδή $\ln(e^x) = x$, έχουμε $(\ln(e^x))' = 1$, άρα $\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1$.
Συνεπώς $(e^x)' = e^x$.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω $f(x), g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y = f(x)$, $y = g(x)$ και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ ισούται με το

$$\int_{a}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
1. Να βρεθεί το εμβαδόν του επιπέδου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^4$ και $y = 2x^2 - 1$.
2. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου .

V. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ

<u>Ακολουθία</u> λέμε μία απεικόνιση α: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, και θέτουμε $\alpha_n = \alpha(n)$.
Θα λέμε ότι η ακολουθία α_n <u>συγκλίνει</u> στο λ (ή ότι έχει <u>όριο</u> το λ) και θα γράφουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lambda$, ή $\lim a_n = \lambda$, ή $a_n \to \lambda$, όταν:

- για $\lambda \in \mathbb{R}$: αν για κάθε ε > 0 υπάρχει N > 0 ώστε $|\alpha_n - \lambda| < \varepsilon$, για κάθε n > N,
- για $\lambda = +\infty$: αν για κάθε ε > 0 υπάρχει N > 0 ώστε $\alpha_n > \varepsilon$, για κάθε n > N,
- για $\lambda = -\infty$: αν για κάθε ε > 0 υπάρχει N > 0 ώστε $\alpha_n < -\varepsilon$, για κάθε n > N.

Περιγραφικά, μπορούμε να λέμε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lambda$ όταν $a_n \approx \lambda$ αν το n είναι αρκετά μεγάλο.

ΠΡΟΤΑΣΗ

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |\alpha_n| = 0$.

ii) Αν $\alpha_n \le \beta_n \le \gamma_n$ για κάθε n, και $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = \lambda$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \lambda$.

iii) Αν $\alpha_n \le \beta_n$ για κάθε n, και $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

iv) Αν $\alpha_n \le \beta_n$ για κάθε n, και $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = -\infty$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = -\infty$.

v) Αν η α_n είναι μονότονη και φραγμένη τότε συγκλίνει σε ένα $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lambda$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \mu$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + \beta_n) = \lambda + \mu$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot \beta_n) = \lambda \cdot \mu$$

δεχόμενοι το συμβολισμό

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$
$$(+\infty)\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$
$$\lambda\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot\lambda = +\infty, \acute{o}\tau\alpha\nu\ \lambda > 0$$
$$\lambda\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot\lambda = -\infty, \acute{o}\tau\alpha\nu\ \lambda > 0$$

$$\lambda\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot\lambda = -\infty, \acute{o}\tau\alpha\nu\ \lambda < 0$$
$$\lambda\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot\lambda = +\infty, \acute{o}\tau\alpha\nu\ \lambda < 0$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$
$$\lambda + (+\infty) = (+\infty) + \lambda = +\infty, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\lambda + (-\infty) = (-\infty) + \lambda = -\infty, \lambda \in \mathbb{R}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$\lim_{n\to\infty} \rho^n = \begin{cases} +\infty, \ \text{αν } \rho > 1 \\ 1, \ \text{αν } \rho = 1 \\ 0, \ \text{αν } |\rho| < 1 \\ \text{δεν συγκλινει, αν } \rho \ \leq \ -1 \end{cases} \quad .x$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν τα x για τα οποία $\lim_{n\to\infty}(1+x)^n = 0$.
2. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{2n+3n^3-1} = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν f(x), g(x) παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ή $+\infty$ ή $-\infty$,

τότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(*Υποθέτουμε ότι το πεδίο ορισμού των f(x), g(x) περιλαμβάνει το* $[1, +\infty)$, $g(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε x, και υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$).

Έστω ακολουθία α_n. Θεωρούμε την ακολουθία s_n των μερικών αθροισμάτων της α_n, δηλ. $s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Την ακολουθία αυτή την λέμε <u>σειρά</u> και την συμβολίζουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$.

Με $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συμβολίζουμε και το όριο της σειράς, όταν υπάρχει, δηλ.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

Περιγραφικά, μπορούμε να θεωρούμε ότι η σειρά είναι ένα άπειρο άθροισμα:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_n + \cdots$$

(όπου η άθροιση γίνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά, ένα στοιχείο κάθε φορά).

ΠΡΟΤΑΣΗ

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n = \begin{cases} +\infty, \text{ αν } \rho \geq 1 \\ \dfrac{\rho}{1-\rho}, \text{ αν } |\rho|<1 \\ \text{δεν υπαρχει, αν } \rho \leq -1 \end{cases}$

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ λέμε ότι <u>συγκλίνει</u> αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

i) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

ii) Αν $a_n \leq b_n \leq d_n$ για κάθε n, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ (όταν αυτά υπάρχουν).

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και ισούται με e^x.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}, \text{όταν } \rho \in (-1, 1).$$

2. Να βρεθεί η τιμή της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (3x-2)^n$$

για κάθε x για την οποία η σειρά συγκλίνει.
3. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

VI. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Διαφορική εξίσωση λέμε την εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση με παράγωγό της. Την άγνωστη συνάρτηση θα την συμβολίζουμε y(x) ή απλά y.
Το σύνολο όλων των συναρτήσεων που ικανοποιούν μία διαφορική εξίσωση το λέμε (γενική) **λύση της διαφορικής εξίσωσης**.
Μερική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης λέγεται μια συγκεκριμένη συνάρτηση που την ικανοποιεί.
Θα λέμε ότι μια διαφορική εξίσωση έχει **τάξη κ** όταν η μεγαλύτερη τάξη παραγώγισης που εμφανίζεται στην άγνωστη συνάρτηση είναι κ. Εν γένει η γενική λύση μιας εξίσωσης τάξης κ εκφράζεται με τη βοήθεια κ αυθαίρετων σταθερών.
Αρχικές συνθήκες μιας διαφορικής εξίσωσης λέμε τις επιπλέον συνθήκες που πρέπει να πληροί η άγνωστη συνάρτηση της διαφορικής εξίσωσης. Οι αρχικές συνθήκες μαζί με την διαφορική εξίσωση προσδιορίζουν εν γένει μία μοναδική συνάρτηση.

Παρατήρηση

Μία διαφορική εξίσωση της μορφής $y^{(n)} = f(x)$ (όπου $y^{(n)}$ η n-στή παράγωγος της y και *f(x)* γνωστή συνάρτηση) λύνεται εύκολα με ολοκληρώσεις, όπως:

$$y' = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx,$$

$$y'' = f(x) \Leftrightarrow y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx.$$

Οι διαφορικές εξισώσεις τέτοιας μορφής λέγονται **στοιχειώδεις**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

α) $y' = x\sqrt{x^2+1}$.

b) $y' = x^2 \eta\mu x$.

c) $y'' = x + 1$.

2. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' = \eta\mu x$, με αρχικές συνθήκες $y(0) = 3$ και $y'(0) = 0$.

Θα εξετάζουμε στη συνέχεια κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων που δεν είναι στοιχειώδεις και που έχουν η κάθε μία την δική της μέθοδο λύσης:

α) Χωριζομένων μεταβλητών.

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$f(y)y' = g(x)$$

όπου f(x), g(x) γνωστές συναρτήσεις και y η άγνωστη συνάρτηση, λέγεται διαφορική εξίσωση **χωριζομένων μεταβλητών.**

Για την λύση της:

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση και παίρνουμε

$$\int f(y)y'dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx\ ,$$

έχοντας κάνει αντικατάσταση της συνάρτησης y με την μεταβλητή y. Μετά την ολοκλήρωση μπορούμε να θεωρούμε και πάλι το y ως συνάρτηση, οπότε έχουμε μια μη διαφορική εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

α) $y' = x \cdot \eta\mu x^2$, β) $y'' = x \cdot \eta\mu x$, γ) $y''' = e^x$.

2. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

α) $y'y^2 = x\eta\mu x$, β) $y'x^2 = y + 1$, γ) $y'x = y$.

3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' = y'\sigma\upsilon\nu x$ (εκφράζοντας το y ως το ολοκλήρωμα γνωστής συνάρτησης, ολοκλήρωμα όμως που δεν θα υπολογίσετε).

β) <u>Γραμμική 1ης τάξης.</u>

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y' + f(x)y = g(x)$$

όπου f(x), g(x) γνωστές συναρτήσεις, λέγεται **γραμμική 1ης τάξης.**

Για την λύση της:

Αν $\int f(x)dx = F(x) + c$, τότε πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με $e^{F(x)}$ οπότε έχουμε

$e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = e^{F(x)}g(x)$, ισοδύναμα:

$$(e^{F(x)}y)' = e^{F(x)}g(x) \Leftrightarrow \int (e^{F(x)}y)'dx = \int e^{F(x)}g(x)dx \Leftrightarrow e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x)dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = e^{-F(x)}\int e^{F(x)}g(x)dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

α) $y' + xy = 1$.

β) $y' + y = x$.

γ) <u>Γραμμική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές</u>.

(Εκτός ύλης για το μάθημα "Εισαγωγή στον Απειροστικό Λογισμό και την Γραμμική Άλγεβρα" του Τμήματος ΑΦΠ&ΓΜ)

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

όπου f γνωστή συνάρτηση και a, b γνωστές σταθερές, λέγεται **γραμμική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές.**

Για την λύση της:

Πρώτα βρίσκουμε την γενική λύση $y_{ο\mu}$ της αντίστοιχης **ομογενούς**

$$y'' + ay' + by = 0,$$

εν συνεχεία βρίσκουμε μία (μερική) λύση y_{μ} της μη ομογενούς $y'' + ay' + by = f(x)$.

Τότε η γενική λύση της $y'' + ay' + by = f(x)$ είναι $y = y_{ο\mu} + y_{\mu}$.

- *Για την λύση της ομογενούς* $y'' + ay' + by = 0$:

Αναζητάμε λύσεις της μορφής $y = e^{\lambda x}$, όπου λ σταθερά.

Τότε πρέπει $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (η εξίσωση αυτή λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** της $y'' + ay' + by = 0$).

i) Αν η $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ έχει δύο πραγματικές λύσεις λ_1, λ_2 τότε η λύση της $y'' + ay' + by = 0$ είναι $y_{ο\mu} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, όπου c_1, c_2, αυθαίρετες σταθερές.

ii) Αν η $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ έχει μία (διπλή) πραγματική λύση λ_1 τότε η λύση της $y'' + ay' + by = 0$ είναι $y_{ο\mu} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$, όπου c_1, c_2, αυθαίρετες σταθερές.

Αν η $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ δεν έχει πραγματική λύση, δηλ. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, έχουμε $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\,\sqrt{-1}}{2a} = r \pm s\sqrt{-1}$ όπου $r = \frac{-b}{2a}, s = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
Τότε $y_{o\mu} = c_1 e^{rx} \sigma\upsilon\nu(sx) + c_2 e^{rx} \eta\mu(sx)$.

- *Για τη μερική λύση της μη ομογενούς* $y'' + ay' + by = f(x)$:

  Εν γένει, η μορφή της y_μ που αναζητάμε είναι παρόμοια με αυτήν της $f(x)$.

  Πιο συγκεκριμένα:

  Α) Αν $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, τότε $y_\mu = y_1 + y_2$, όπου το y_1 είναι της μορφής $f_1(x)$ και το y_2 είναι της μορφής $f_2(x)$.

  Β) Αν $f(x) = p(x)\, e^{\omega x}\, \sigma\upsilon\nu(kx)$ ή αν $f(x) = p(x)\, e^{\omega x}\, \eta\mu(kx)$,

  όπου $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού n και ω, k σταθερές, τότε

  $$y_\mu = q(x)\, e^{\omega x}\, \sigma\upsilon\nu(kx) + r(x)\, e^{\omega x}\, \eta\mu(kx),$$

  όπου $q(x), r(x)$ πολυώνυμα βαθμού n.

  Αν η προηγούμενη μορφή y_μ δεν δίνει μερική λύση τότε αναζητάμε λύση της μορφής x y_μ ή $x^2 y_\mu$.

δ) <u>Ομογενείς</u>

(Εκτός ύλης για το μάθημα "Εισαγωγή στον Απειροστικό Λογισμό και την Γραμμική Άλγεβρα" του Τμήματος ΑΦΠ&ΓΜ)

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

όπου f γνωστή συνάρτηση, λέγεται **ομογενής.**

Για την λύση της:

Θέτουμε $\frac{y}{x} = z$. Οπότε y = xz και y΄ =z + xz΄. Συνεπώς, αρκεί να υπολογίσουμε την άγνωστη συνάρτηση z στην διαφορική εξίσωση $z + xz' = f(z) \Leftrightarrow z' \frac{1}{f(z) - z} = \frac{1}{x}$,

όπου z είναι η άγνωστη συνάρτηση σε μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

VII. Ευκλείδειοι Χώροι

Ορίζουμε ως $\mathbb{R}^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο όλων διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Το $\mathbb{R}^n$ λέγεται <u>ευκλείδειος n-χώρος</u> και τα στοιχεία του λέγονται <u>διανύσματα</u> ή <u>σημεία</u>. Το x_i λέγεται i-συντεταγμένη του $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Έστω $(x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $(y_1, y_2, ...y_m) \in \mathbb{R}^m$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$(x_1, x_2, ...x_n) = (y_1, y_2, ...y_m) \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \quad \text{και} \\ x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n. \end{cases}$$

Το διάνυσμα που έχει όλες τις συντεταγμένες του μηδέν θα το λέμε <u>μηδενικό</u> διάνυσμα και θα το συμβολίζουμε **0**, (κάθε φορά θα εννοείται το πλήθος των συντεταγμένων του).

Στο $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε τις πράξεις:
την <u>πρόσθεση</u>: $(x_1, x_2, ...x_n) + (y_1, y_2, ...y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...x_n + y_n)$
και τον <u>αριθμητικό πολλαπλασιασμό</u>: $\lambda(x_1, x_2, ...x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ...\lambda x_n)$.
Θέτουμε $(x_1, x_2, ...x_n)$ - $(y_1, y_2, ...y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$.

Αν $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_\kappa \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\kappa \in \mathbb{R}$, τότε το $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + ... + \lambda_\kappa \boldsymbol{\alpha}_\kappa$ λέγεται <u>γραμμικός συνδυασμός</u> των $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_\kappa$.

Αν θέσουμε Α = { $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_\kappa$ }, τότε με S(A) συμβολίζουμε το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_\kappa$. Το S(A) λέγεται και <u>παραγόμενο σύνολο από το Α με γραμμικούς συνδυασμούς</u>.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, με $A \neq \varnothing$. Το A λέγεται <u>υπόχωρος</u> του $\mathbb{R}^n$ αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) Αν **α** και **β** $\in A$ τότε **α** + **β** $\in A$,
ii) Αν **α** $\in A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε λ**α** $\in A$.

Το $\mathbb{R}^n$ είναι υπόχωρος, ομοίως ο <u>μηδενικός</u> υπόχωρος {**0**}, όπου **0** $\in \mathbb{R}^n$.

Πρόταση
Το S(A) είναι υπόχωρος.

Θεώρημα
Αν X είναι υπόχωρος τότε $X = S(A)$, για κάποιο A = { $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_\kappa$ }.

Αν A, B υπόχωροι και $A \subseteq B$ τότε λέμε ότι το A είναι <u>υπόχωρος του B</u>.

Πρόταση
Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι: το {**0**}, το $\mathbb{R}^2$, και οι ευθείες που περνούν από το **0**.

Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ είναι: το $\{\mathbf{0}\}$, το $\mathbb{R}^3$, οι ευθείες που περνούν από το **0**, και τα επίπεδα που περνούν από το **0**.

Ασκήσεις

1) Εξετάστε πότε ισχύουν οι ισότητες: $\{x\} = \{y, z\}$, $(a, d, 2, h) = (d, h, e, 2)$, $\{\rho, \lambda\} = \{\lambda, \rho\}$, $(\kappa, \nu) = (\nu, \kappa)$.
2) Δείξτε ότι το A = {(x, x + y): x, y$\in\mathbb{R}$} είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
3) Δείξτε ότι το B = {(x, x^2): x$\in\mathbb{R}$} δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
4) Βρείτε για ποιες τιμές του ρ το σύνολο Γ = {(x, x + ρ, x): x$\in\mathbb{R}$} είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
5) Εξετάστε αν το $\Delta = \{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.
6) Εξετάστε αν το $\mathrm{E} = \{(x, y, z, w) : \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 w = 0, \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 w = 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, όπου $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ σταθερές.
7) Ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ είναι ένα από τα ακόλουθα: ή το σύνολο που περιέχει μόνο το σημείο της αρχής των αξόνων, ή το σύνολο των σημείων μιας ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων, ή όλο το $\mathbb{R}^3$.
8) Ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι ένα από τα ακόλουθα: ή το σύνολο που περιέχει μόνο το σημείο της αρχής των αξόνων, ή το σύνολο των σημείων μιας ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων, ή το σύνολο των σημείων ενός επιπέδου που περνάει από την αρχή των αξόνων, ή όλο το $\mathbb{R}^3$.
9) Δείξτε ότι $S(\{(1,2), (1,3)\}) = \mathbb{R}^2$.

Τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_\kappa \in \mathbb{R}^n$ λέγονται <u>γραμμικά ανεξάρτητα</u> αν κανένα από τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots,$ $\mathbf{a}_\kappa$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα: η εξίσωση $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_\kappa \mathbf{a}_\kappa = \mathbf{0}$ έχει μόνο την μηδενική λύση, δηλ.

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_\kappa \mathbf{a}_\kappa = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\kappa = 0.$$

Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι τα (1, 1), (1, 2) είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2) Εξετάστε ποιά από τα (1, 1), (1, 2), (2, 1) είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο.
3) Όταν ένα σύνολο διανυσμάτων Α του $\mathbb{R}^n$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα τότε τα διανύσματα του Α δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
4) Αν τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε η εξίσωση
$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_\kappa \mathbf{a}_\kappa = \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \dots + \mu_\kappa \mathbf{a}_\kappa$$
ισχύει τότε και μόνο όταν $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_\kappa = \mu_\kappa$.
5) Έστω Α = $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ όπου $\mathbf{e}_i$ τα μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, δηλ.
$$\mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \dots, \delta_{in}), \text{ με } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ αν } i=j \\ 0 \text{ αν } i \neq j \end{cases}.$$
Τότε S(A) = $\mathbb{R}^n$.

Ένα σύνολο Α = { **α**$_1$, **α**$_2$,..., **α**$_κ$ } $\subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>βάση</u> ενός υπόχωρου Χ $\subseteq \mathbb{R}^n$, όταν:

i) S(A) = X, και
ii) τα στοιχεία του Α είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα

i) Κάθε υπόχωρος Χ $\neq$ {**0**} έχει βάση.
ii) Αν τα {**α**$_1$, **α**$_2$,.., **α**$_κ$}και {**β**$_1$, **β**$_2$,..., **β**$_λ$} είναι δύο βάσεις ενός υπόχωρου Χ, τότε κ = λ.
iii) Αν {**α**$_1$, **α**$_2$, . .., **α**$_κ$} είναι βάση του υπόχωρου Χ, {**β**$_1$, **β**$_2$,..., **β**$_λ$ } είναι βάση του υπόχωρου Υ, και Χ $\subseteq$ Υ, τότε κ $\leq$ λ. Το κ = λ ισχύει μόνο όταν Χ = Υ.

Άρα το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης ενός μη μηδενικού υπόχωρου είναι μοναδικός, δεν εξαρτάται από τη μορφή της βάσης.

Ορίζουμε ως <u>διάσταση</u> ενός υπόχωρου Χ μία τιμή που την συμβολίζουμε dimX και ισούται:
με το πλήθος των στοιχείων μίας βάσης του Χ αν Χ$\neq$ {**0**},
και μηδέν αν Χ = {**0**}.

Πρόταση

Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι οι εξής:
το {**0**}, το $\mathbb{R}^2$, καθώς και οι ευθείες που περνούν από το **0**,
με αντίστοιχες διαστάσεις 0, 2, 1.
Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ είναι οι εξής:
το {**0**}, το $\mathbb{R}^3$, οι ευθείες που περνούν από το **0**, καθώς και τα επίπεδα που περνούν από το **0**,
με αντίστοιχες διαστάσεις 0, 3, 1, 2.

Ασκήσεις

1) dim $\mathbb{R}^n$ = n.
2) Βρείτε την διάσταση του υπόχωρου $X = \{(x, y, z, w): x + y + z + w = 0\}$.
3) Βρείτε την διάσταση του υπόχωρου
$X = \{(x, y, z, w): x + y + z + w = 0, x + 2y = 0\}$.
4) Περιγράψτε ως σύνολο τον υπόχωρο που έχει βάση τα διανύσματα (1, 2, 3), (1, -2, 1).
5) Τα **α**$_1$, **α**$_2$,..., **α**$_κ$ είναι βάση του υπόχωρου S({**α**$_1$, **α**$_2$,..., **α**$_κ$ }) τότε και μόνο όταν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
6) Ο μέγιστος αριθμός από τα **α**$_1$, **α**$_2$,..., **α**$_κ$ $\in \mathbb{R}^n$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα αποτελούν βάση του S({**α**$_1$, **α**$_2$,..., **α**$_κ$ }).

Μία εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots.. + a_nx_n = b \ ,$$

όπου $a_1, a_2,\ldots.a_n, b$ σταθερές και $x_1, x_2,\ldots.x_n$ άγνωστοι, λέγεται **γραμμική**.
Αν $b = 0$, τότε η προηγούμενη εξίσωση λέγεται **ομογενής**, και η

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$$

λέμε ότι είναι η **αντίστοιχη ομογενής** της

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b \quad .$$

Πρόταση

α) Το σύνολο των $(x_1, x_2,....x_n) \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν μία ομογενή γραμμική εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$ αποτελεί υπόχωρο.

β) Το σύνολο των $(x_1, x_2,....x_n) \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν ένα σύστημα m ομογενών γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0\\
&.....\\
&.....\\
&\\
&.....\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned}$$

(όπου τα a_{ij} σταθερές), αποτελούν υπόχωρο.

γ) Αν $(\xi_1, \xi_2,....\xi_n)$ είναι μία λύση ενός συστήματος m γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2\\
&.....\\
&.....\\
&\\
&.....\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

(όπου τα a_{ij} και b_i σταθερές), τότε κάθε άλλη λύση είναι της μορφής $(x_1, x_2,....x_n) + (\xi_1, \xi_2,....\xi_n)$, όπου $(x_1, x_2,....x_n)$ είναι λύση του συστήματος των αντίστοιχων ομογενών γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0\\
&.....\\
&.....\\
&\\
&.....\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 .
\end{aligned}$$

Πρόταση

Κάθε υπόχωρος αποτελεί το σύνολο των λύσεων ενός συστήματος ομογενών γραμμικών εξισώσεων.

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι της μορφής

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

....

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

όπου x_i άγνωστος.
Ένα σύστημα δεν είναι αδύνατον όταν υπάρχουν τιμές στους αγνώστους που την επαληθεύουν.
Αν ένα σύστημα έχει άπειρες λύσεις τότε υπάρχουν κάποιοι άγνωστοι που αν θέσουμε σαυτούς αυθαίρετες τιμές οι υπόλοιποι πρέπει να πάρουν συγκεκριμένες τιμές.
Διάσταση του χώρου των λύσεων λέμε τον αριθμό των αγνώστων που αυθαίρετες τιμές σε αυτούς δίνουν μοναδικές τιμές στους υπολοίπους.
Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση τότε η διάσταση του χώρου των λύσεων λέμε ότι είναι μηδέν.

Θεώρημα

Έστω ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων με m εξισώσεις και n αγνώστους. Τότε

- ή έχει μοναδική λύση το σύστημα
  (οπότε πρέπει $m = n$),
- ή έχει άπειρες λύσεις το σύστημα
  (οπότε οι λύσεις θα είναι της μορφής
  $$c_1\overrightarrow{\xi_1} + c_2\overrightarrow{\xi_2} + \cdots + c_\kappa\overrightarrow{\xi_\kappa} + \overrightarrow{\xi_0},$$
  με τα $c_1, c_2, \ldots, c_\kappa$ αυθαίρετες σταθερές, με τα $\overrightarrow{\xi_1}, \overrightarrow{\xi_2}, \ldots, \overrightarrow{\xi_\kappa}, \overrightarrow{\xi_0} \in \mathbb{R}^n$ δεδομένα διανύσματα, με τα $\overrightarrow{\xi_1}, \overrightarrow{\xi_2}, \ldots, \overrightarrow{\xi_\kappa}$ γραμμικά ανεξάρτητα),
- ή το σύστημα είναι αδύνατο.

XIII. Πίνακες

<u>Πίνακας</u> $m \times n$ είναι μία διάταξη $m \cdot n$ στοιχείων a_{ij}, με $i = 1, 2, ..., m$ και $j = 1, 2, ..., n$, (που συνηθίζουμε να τον συμβολίζουμε με $[\, a_{ij}\,]$ ή με ένα κεφαλαίο γράμμα) και να τον παριστάνουμε με έναν ορθογώνιο πλέγμα θέσεων που διατάσσονται σε m γραμμές και n στήλες, με το a_{ij} να βρίσκεται στην i −γραμμή και στην j −στήλη, ως εξής:

$$[\, a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & & . \\ . & . & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Πίνακας $m \times n$ είναι μία διάταξη $m \cdot n$ στοιχείων που διατάσσονται σε m γραμμές και n στήλες. Αν το γενικό στοιχείο του πίνακα Α το συμβολίσουμε α τότε το στοιχείο που βρίσκεται στην i γραμμή και στη j στήλη το συμβολίζουμε α_{ij}.

Έστω το γραμμικό σύστημα εξισώσεων Σ:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ &..... \\ &..... \\ \\ &..... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

όπου a_{ij}, b_i σταθερές και x_j άγνωστος,

και ο πίνακας Α:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Θα λέμε ότι το σύστημα Σ αντιστοιχεί στον πίνακα Α και αντίστροφα, ο πίνακας Α αντιστοιχεί στο σύστημα Σ.

Παρατηρούμε ότι οι ακόλουθες πράξεις σε έναν σύστημα εξισώσεων δίνουν ισοδύναμο σύστημα:

1) Η αντιμετάθεση δύο εξισώσεων.
2) "Η πρόσθεση σε μία εξίσωση ένα πολλαπλάσιο μίας άλλης".
3) Η αντικατάσταση μίας εξίσωσης με ένα "μη μηδενικό πολλαπλάσιο της".

Ορίζουμε ως <u>στοιχειώδεις πράξεις</u> σε έναν πίνακα τις ακόλουθες:

1) Την αντιμετάθεση δύο γραμμών.
2) Την πρόσθεση σε μία γραμμή ένα πολλαπλάσιο μίας άλλης
3) Την αντικατάσταση μίας γραμμής με ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιό της .

Πρόταση
Έστω πίνακας B που προκύπτει από τον πίνακα A μετά από στοιχειώδεις πράξεις. Τότε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που αντιστοιχεί στον A είναι ισοδύναμο με αυτόν που αντιστοιχεί στο B.

Ένα πίνακας λέγεται κλιμακωτός αν ο πρώτος μη μηδενικός όρος κάθε γραμμής βρίσκεται σε δεξιότερη θέση από αυτή του πρώτου μη μηδενικού όρου της προηγούμενης γραμμής.

Πρόταση
Κάθε πίνακας, μετά από κάποιες στοιχειώδεις πράξεις, γίνεται κλιμακωτός.

Ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ενός πίνακα A λέγεται τάξη του πίνακα A, και συμβολίζεται rankA.

Πρόταση
Αν B είναι πίνακας που προκύπτει από τον A μετά από στοιχειώδεις πράξεις, τότε rankA = rankB.

Πρόταση
Η τάξη ενός κλιμακωτού πίνακα ισούται με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών του.

Πρόταση (Παραλείπεται)
Έστω B κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει από τον A μετά από στοιχειώδεις πράξεις. Θέτουμε $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις γραμμές του A, και $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις γραμμές του B. Τότε

$$S(\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}) = S(\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m\}).$$

Στους πίνακες ορίζουμε τις πράξεις:

1) Την πρόσθεση. Αν $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ δύο πίνακες $m\times n$, τότε ορίζουμε $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]$, όπου $[c_{ij}]$ πίνακας $m\times n$ με $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, για κάθε *i, j*.
2) Τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό. Αν $[a_{ij}]$ πίνακας $m\times n$ και λ αριθμός τότε ορίζουμε $\lambda[a_{ij}] = [b_{ij}]$,όπου $[b_{ij}]$ πίνακας $m\times n$ με $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, για κάθε *i, j*.
3) Το γινόμενο πινάκων. Αν $[a_{ij}]$ πίνακας $m\times n$ και $[b_{jk}]$ πίνακας $n\times l$, τότε ορίζουμε $[a_{ij}]\cdot[b_{jk}] = [c_{ik}]$, όπου $[c_{ik}]$ πίνακας $m\times l$ με $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ik}$, για κάθε *i, k*.

Πρόταση (Ιδιότητες των πράξεων πινάκων)
Έστω A, B, C πίνακες και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε (εφόσον οι διαστάσεις των πινάκων επιτρέπουν τις πράξεις), έχουμε τις ισότητες:

(i) $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathrm{A}$
(ii) $\lambda(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \lambda\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B}$
(iii) $(A + B)C = AC + BC$
(iv) $A(B + C) = AB + AC$
(v) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
(vi) $(AB)C = A(BC)$

(Σημειώνουμε ότι εν γένει $AB \neq BA$.)

Απόδειξη της ιδιότητας (vi):
Έστω ότι $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$, $C = [c_{kl}]$, όπου A, B, C είναι m$\times n$, n$\times r$, r$\times s$ πίνακες αντίστοιχα. Τότε

$$(AB)C = \left([a_{ij}][b_{jk}]\right)[c_{kl}] = [\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}]\,[c_{kl}]] = [\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}] =$$
$$= [\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{ij}b_{jk}c_{kl}] = [a_{ij}][\sum_{k=1}^{r} b_{jk}c_{kl}] = [a_{ij}]\left([b_{jk}][c_{kl}]\right) =$$
$$= A(BC).$$

Τους πίνακες $[\,a_{ij}\,]$ όπου $a_{ij} = 0$, για κάθε i, j, τους λέμε <u>μηδενικούς</u> και τους συμβολίζουμε με O.
Οι $n \times n$ πίνακες λέγονται <u>τετραγωνικοί</u>.
Τους τετραγωνικούς πίνακες $[\,a_{ij}\,]$ με $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ i = j \\ 0 & \alpha\nu\ i \neq j \end{cases}$, για κάθε i, j, τους λέμε <u>ταυτοτικούς</u> και τους συμβολίζουμε με I.

Αν I είναι ο $n \times n$ ταυτοτικός, B πίνακας $n \times l$ και C πίνακας $l \times n$, τότε

$$\mathrm{I} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B}, \quad \mathrm{C} \cdot \mathrm{I} = \mathrm{C}.$$

Ένας πίνακας A λέγεται <u>αντιστρέψιμος</u> αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε
$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I},$$
όπου I ταυτοτικός, οπότε ο B λέγεται <u>αντίστροφος</u> του A.

Πρόταση

i) Αν ο A έχει αντίστροφο B τότε οι A, B είναι της μορφής $n \times n$.
ii) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε έχει μοναδικό αντίστροφο.

Ο αντίστροφος του A, αν υπάρχει, συμβολίζεται A^{-1}.

Ασκήσεις

1) Δώστε παραδείγματα πινάκων A, B για τους οποίους δεν ορίζεται το γινόμενο AB αλλά ορίζεται το BA.
2) Δώστε παράδειγμα πινάκων A, B για τους οποίους ορίζονται τα γινόμενα AB, BA και i) $AB \neq BA$ ii) AB = BA.
3) Δείξτε ότι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.
4) Βρείτε την τάξη του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Για κάθε $n \times n$ πίνακα A ορίζουμε μία τιμή που λέγεται <u>ορίζουσα</u> και συμβολίζεται detA ή |A|. Ο ορισμός γίνεται επαγωγικά για n = 2, 3, 4, … . και ισχύουν τα εξής:

- Για 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ορίζουμε detA = ad – bc.
- Για 3×3 πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, ορίζουμε

$$detA = a_1 \det\begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} - c_1 \det\begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} + c_1 \det\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

- Για $n \times n$ πίνακα A, με $n \geq 3$, ισχύει ότι **(Παραλείπεται)**

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \text{ για κάθε j,}$$

$$\text{και } \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \text{ για κάθε i.}$$

Όπου A_{ij} ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν αφαιρέσουμε την $i - γραμμη$ και την $j - στηλη$.

Πρόταση

Ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε και μόνο αν $\det A \neq 0$.

Ασκήσεις

1) Βρείτε μια βάση και την διάσταση του υπόχωρου S(A), όπου A = {(1, 2, 2, 1), (1, 3, 1, 4), (0, 1, 1, 1), (3, 9, 8, 12) }.

2) Εξετάστε για ποια x, y ο πίνακας $\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ xy^7 & x^9y & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.

Πρόταση
Αν A, B πίνακες $n\times n$, και I ταυτοτικός, τότε det(AB) = det(A)det(B), detI = 1.

Αν $[a_{ij}]$ πίνακας $m\times n$, $[x_j]$ πίνακας $n\times 1$ και $[b_i]$ πίνακας $m\times 1$, τότε η εξίσωση $[a_{ij}]\cdot[x_j] = [b_i]$, δηλ. η

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & & . \\ . & . & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix},$$

είναι ισοδύναμη με το σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}.$$

Με M_{mn} θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $m\times n$ πινάκων.

Πρόταση
Αν A $\in M_{mn}$, τότε ο πίνακας A ορίζει μια απεικόνιση f_A: $M_{nr} \to M_{mr}$ ως εξής:

$f_A(X)$ = AX, για κάθε X$\in M_{nr}$.

Μία απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>γραμμική</u> αν έχει τις ιδιότητες:

α) $f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$

β) $f(\lambda\mathbf{a}) = \lambda f(\mathbf{a})$

για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Χωρίς βλάβη μπορούμε να ταυτίζουμε τους πίνακες $n\times 1$ με τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ (δηλ. $M_{n1} = \mathbb{R}^n$), ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = \boldsymbol{a},$$

Πρόταση

Έστω A πίνακας $m\times n$, τότε η απεικόνιση f_A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με

$$f_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{m1} = \mathbb{R}^m$$

είναι γραμμική, και αντίστροφα: για κάθε γραμμική φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ υπάρχει πίνακας A ώστε $\varphi = f_A$.

Πρόταση

Έστω πίνακας της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{bmatrix},$$

όπου φ σταθερά.

Τότε τα διανύσματα

$$(x, y) \text{ και } A(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

όπου $(x, y) \neq (0,0)$, είναι ίσα και σχηματίζουν γωνία φ.

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(-\varphi) & -\eta\mu(-\varphi) \\ \eta\mu(-\varphi) & \sigma\upsilon\nu(-\varphi) \end{bmatrix}.$$

Ισχύει δε ότι

$$\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi_1 & -\eta\mu\varphi_1 \\ \eta\mu\varphi_1 & \sigma\upsilon\nu\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi_2 & -\eta\mu\varphi_2 \\ \eta\mu\varphi_2 & \sigma\upsilon\nu\varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\varphi_1 + \varphi_2) & -\eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2) & \sigma\upsilon\nu(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix}$$

για τυχόντα φ_1, φ_2.

Έστω Α = $[a_{ij}] \in M_{m,n}$ και $\boldsymbol{b} \in M_{m,1} = \mathbb{R}^m$, τότε ορίζουμε τον <u>επαυξημένο</u> πίνακα

$$[\mathrm{A}|\,\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Προφανώς, ο πίνακας [Α| ***b***] είναι $m\times (n + 1)$.

Πρόταση

Έστω ότι ο πίνακας [Α| ***b***] μετά από στοιχειώδεις πράξεις γίνεται [Α΄| ***b΄***], τότε οι εξισώσεις Α***x*** = ***b*** και Α΄***x*** = ***b΄*** είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα

Η εξίσωση Α***x*** = ***b***, όπου Α $m\times n$ πίνακας, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, έχει λύση ως προς $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ τότε και μόνο όταν

$$\mathrm{rankA} = \mathrm{rank}[\mathrm{A}|\,\boldsymbol{b}].$$

Έχει μοναδική λύση τότε και μόνο όταν rankA = rank[Α| ***b***] = n.

Έχει άπειρες λύσεις αν rankA = rank[Α: ***b***] < n.

Αν $\boldsymbol{x}_\mu$ είναι μία (<u>μερική</u>) λύση της εξίσωσης Α***x*** = ***b***, τότε κάθε λύση της είναι της μορφής $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_\mu$, όπου $\boldsymbol{x}_0$ λύση της (<u>αντίστοιχης ομογενούς</u>) Α***x*** = ***0***.

Πρόταση

Το σύνολο των λύσεων $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ της εξίσωσης Α***x*** = ***0***, όπου $\mathrm{A}\in M_{m,n}$ και ***0*** το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Έχει μοναδική λύση η εξίσωση Α***x*** = ***0*** (τη μηδενική) τότε και μόνο όταν rankA = n.

Πρόταση

Ένας $n\times n$ πίνακας Α έχει αντίστροφο τότε και μόνο όταν rankA = n.

Ασκήσεις

1) Εξετάστε για τις διάφορες τιμές του λ τις λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x + 3y + \lambda z + w &= 1 \\ x + y + z + w &= \lambda \end{aligned}\right\}.$$

2) Ποια είναι η διάσταση του χώρου των λύσεων του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

3) Δείξτε, χωρίς τη χρήση Θεωρήματος, ότι αν ο πίνακας $[A|\,\boldsymbol{b}]$ είναι κλιμακωτός τότε για να έχει λύση η εξίσωση $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ πρέπει και αρκεί να ισχύει rankA = rank$[A|\,\boldsymbol{b}]$.

IX. Οι Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$.

Πρώτα δίνουμε δύο ορισμούς που ισχύουν γενικότερα για τους $\mathbb{R}^n$:
<u>Μέτρο</u> του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ λέμε την τιμή

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + \ldots + (\alpha_n)^2}\ ,$$

όπου $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Ορίζουμε ως <u>εσωτερικό γινόμενο</u> των $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$ την τιμή

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \ldots + \alpha_n\beta_n,$$

όταν $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Θεώρημα
Έστω $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^2$ μη μηδενικά, τότε

$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = |\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|$ συνθ, όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα **α, β**.

Πόρισμα
i) $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \iff$ "ή κάποιο από τα **α, β** είναι μηδέν ή τα **α, β** είναι κάθετα".
ii) $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = |\boldsymbol{\alpha}|^2$

Μια <u>ευθεία</u> στο $\mathbb{R}^3$ (αντίστοιχα στο $\mathbb{R}^2$) είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) της μορφής $\{t\mathbf{a} + \mathbf{b}:\ t \in \mathbb{R}\}$ όπου **a, b** διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ (αντίστοιχα του $\mathbb{R}^2$) με $\mathbf{a} \neq 0$. Αυτός ο τρόπος παράστασης της ευθείας λέγετε <u>παραμετρικός</u>.
Η ευθεία $\{t\mathbf{a} + \mathbf{b}:\ t \in \mathbb{R}\}$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα **a** και περνά από το σημείο **b.**

Ένα <u>επίπεδο</u> στο $\mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) της μορφής $\{t\mathbf{a} + s\mathbf{b} + \mathbf{c}:\ t, s \in \mathbb{R}\}$, όπου **a, b, c** διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, με **a, b** διάφορα του **0** και μη παράλληλα.

Αυτός ο τρόπος παράστασης του επιπέδου λέγετε <u>παραμετρικός</u>.
Το επίπεδο $\{t\mathbf{a} + s\mathbf{b} + \mathbf{c}:\ t, s \in \mathbb{R}\}$ είναι παράλληλο προς τα διανύσματα **a**, **b** και περνά από το σημείο **c.**

Πρόταση
Μία ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ αποτελείται από σημεία (x, y) που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $ax + by = c$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ σταθερές με $|a| + |b| \neq 0$. Το διάνυσμα (a, b) είναι κάθετο στην ευθεία.

Πρόταση
Ένα επίπεδο αποτελείται από σημεία (x, y, z) που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ σταθερές με $|a| + |b| + |c| \neq 0$.
Το διάνυσμα $\mathbf{a} = (a, b, c)$ είναι κάθετο στο επίπεδο.

Εξωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$

Ορίζουμε ως <u>εξωτερικό γινόμενο</u> των **α, β** $\in \mathbb{R}^3$ την τιμή

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right),$$

όταν $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Συμβολικά: $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$

Όπου

$$\boldsymbol{e_1} = (1,0,0), \qquad \boldsymbol{e_1} = (0,1,0), \qquad \boldsymbol{e_1} = (0,0,1).$$

Θεώρημα
Έστω **α, β** $\in \mathbb{R}^3$ μη μηδενικά, τότε:

i) Το $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ είναι κάθετο στα διανύσματα α, **β.**
ii) $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|$ ημθ, όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα **α, β**.

Πόρισμα
i) Το $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|$ ισούται με το **εμβαδόν** του παραλληλογράμμου που έχει τα διανύσματα **α, β** πλευρές.

ii) Το $|\,(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}| = \left|\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\right|$ ισούται με το **όγκο** του παραλληλεπιπέδου που έχει τα διανύσματα **α, β, γ** ακμές.

iii) **i)** $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = 0 \Leftrightarrow$ "ή κάποιο από τα **α, β** είναι μηδέν ή τα διανύσματα **α, β** είναι παράλληλα".

X. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

(Εκτός ύλης για το μάθημα "Εισαγωγή στον Απειροστικό Λογισμό και την Γραμμική Άλγεβρα" του Τμήματος ΑΦΠ&ΓΜ)

Μια απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$, λέγεται (πραγματική) *συνάρτηση n μεταβλητών*. Θέτουμε $f(x_1, x_2, ... x_n)$ την τιμή της f στη θέση $(x_1, x_2, ... x_n) \in X$. Την f θα την συμβολίζουμε και $f(x_1, x_2, ... x_n)$. Λέμε ότι τα x_i, είναι οι μεταβλητές της $f(x_1, x_2, ... x_n)$.
Μία συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots x_n)$θα τη λέμε συνεχή αν $f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots x_n + dx_n)$, όταν $dx_1 \approx dx_2 \approx \cdots \approx dx_n \approx 0$.

Αν x είναι μία μεταβλητή της f, τότε με f_x ή $\frac{\partial f}{\partial x}$ συμβολίζουμε την παράγωγο της f ως προς x (εφόσον υπάρχει), θεωρώντας τις άλλες μεταβλητές σταθερές. Λέμε την $\frac{\partial f}{\partial x}$ *μερική παράγωγο* της f ως προς x.

Αν x, y είναι μεταβλητές της f, θέτουμε $\frac{\partial f_x}{\partial y}$ ή f_{xy} ή $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ την μερική παράγωγο της f_x ως προς x (εφόσον υπάρχει).
Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες ως προς κάθε μεταβλητή.

Πρόταση
Ισχύει ότι $f_{xy} = f_{yx}$.

Πρόταση (Κανόνας της αλυσίδας)
Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, ... x_n)$ και

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, .. t_m),\ x_2 = x_2(t_1, t_2, .. t_m),\ ....,\ x_n = x_n(t_1, t_2, .. t_m).$$

συναρτήσεις που εξαρτούνται από τις μεταβλητές $t_1, t_2, ... t_m$.
Οπότε μπορούμε να θεωρούμε $f = f(t_1, t_2, ... t_m)$.
Ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$,
για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Κλίση της $f = f(x_1, x_2, ... x_n)$ λέμε τη (διανυσματική) συνάρτηση

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Έστω $f = f(x_1, x_2,...x_n)$ και $\xi = (\xi_1, \xi_2,..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ με $|\xi| = 1$. *Η παράγωγος της* f *στο σημείο* $(x_1, x_2,...x_n)$ *κατά την διεύθυνση* ξ ορίζεται το

$$D_\xi f(x_1, x_2,...x_n) = \left.\frac{df(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2,...x_n + t\xi_n)}{dt}\right|_{t=0}.$$

δηλ. $D_\xi f(x_1, x_2,...x_n) \approx \dfrac{f(x_1, x_2,...x_n) - f(x_1 + dt\cdot\xi_1, x_2 + dt\cdot\xi_2,...x_n + dt\cdot\xi_n)}{dt}$ όπου $dx \approx 0$.

(Έστω $f = f(x_1, x_2,...x_n)$ και $\xi = (\xi_1, \xi_2,..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\xi \neq 0$.. *Ως παράγωγο της* f *στο σημείο* $(x_1, x_2,...x_n)$ *κατά την διεύθυνση* του ξ *θα εννοούμε το* $D_\eta f(x_1, x_2,...x_n)$ όπου $\eta = \xi/|\xi|$.)

Πρόταση

Ισχύει ότι $D_\xi f = \nabla f \cdot \xi$,

δηλ. $D_\xi f(x_1, x_2,...x_n) = (\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2},..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}) \cdot (\xi_1, \xi_2,..., \xi_n) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\xi_n .$$

Υποθέτουμε ότι $|\xi| = 1$.

Άσκηση.

Δείξτε την προηγούμενη Πρόταση όταν $n = 2$.

Πρόταση

α) Μια εξίσωση της μορφής $f(x, y) = c$ ικανοποιείται από ένα σύνολο σημείων (x, y) που αποτελούν καμπύλη όταν $\nabla f(x, y) \neq (0,0)$. Τότε το $\nabla f(x, y)$ είναι κάθετο στην καμπύλη στο σημείο (x, y).

β) Μια εξίσωση της μορφής $f(x, y, z) = c$ ικανοποιείται από ένα σύνολο σημείων (x, y, z) που αποτελούν επιφάνεια όταν $\nabla f(x, y, z) \neq (0,0,0)$. Τότε το $\nabla f(x, y, z)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο (x, y, z).

γ) Έστω $f(x, y,...z)$ συνάρτηση $n-$μεταβλητών $x, y,..., z$ και c σταθερά. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x, y,..., z) = c$ έχει μία (τουλάχιστον) λύση $\xi = (x_0, y_0,..., z_0) \in \mathbb{R}^n$ και $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0,..., z_0) \neq 0$. Τότε η εξίσωση $f(x, y,..., z) = c$ λύνεται ως προς x όταν $(y,..., z) \approx (y_0,..., z_0)$

Λέμε ότι η $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ έχει *τοπικό μέγιστο* (αντίστοιχα: *τοπικό ελάχιστο*) στο σημείο $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ αν $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \leq f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ (αντίστοιχα: $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ $\leq f(x_1, x_2, \ldots x_n)$) όταν $x_1 \approx \xi_1, x_2 \approx \xi_2, \ldots, x_n \approx \xi_n$.

Πρόταση
Τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης $f = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Πρόταση
Μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ έχει τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα: ελάχιστο) σε ένα σημείο $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ τότε και μόνο όταν η συνάρτηση

$$g(t) = f(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, \ldots x_n + t\xi_n),\ t \in \mathbb{R},$$

έχει τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα: ελάχιστο) στο $t = 0$, για κάθε $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$.

Πρόταση
Έστω $f = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, τότε

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n,$$

Η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ είναι πλησιέστερα προς το 0.

Πρόταση
Έστω $f = f(x, y)$ για την οποία έχουμε $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ για κάποιο (x_0, y_0). Τότε η εξίσωση $f(x, y) = 0$ λύνεται ως προς y, για $x \approx x_0$, οπότε $f_x + y' \cdot f_y = 0$.