

## Άσκησης εδωανάληψης

(Οι ασκήσεις αυτές είναι μάλλον δυσκολότερες των εξετάσεων αλλά ενδεικτικά του περιεχομένου των θεμάτων που θα εξεταστούν.)

1) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = -e^{-x} + x^2 + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι γνησίως αύξουσα και ότι η εξίσωση  $e^{-x} = x^2 + 2$  έχει μια μοναδική λύση.

2) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int x \cdot \sin(2x) dx$

3) Να βρεθεί συνάρτηση  $f(x)$  ώστε  $\int f(x) dx = x \cdot \ln e^x + e^{x^2} + c$

4) Εξετάστε για ποιές τιμές του  $\lambda$  έχει μοναδική λύση το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x - y + z &= -1 \\ 3x + \lambda y - 2z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

5) Εξετάστε αν είναι αντιστρέψιμος ο πίνακας που

δίδεται από το γινόμενο πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6) Εξετάστε αν τα επίπεδα του  $\mathbb{R}^3$  με εξισώσεις

$$x + y - z = 1, \quad -x + y + 2z = 2 \quad \text{και} \quad x + 5y + z = 7$$

έχουν κοινή μια ευθεία.

7) Δίδονται τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  για τα οποία  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  και  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ . Να βρεθεί το μήκος του διανύσματος  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

8) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση  $2y'y^2 = e^x$ .