Ερώτηση 1, χωρίς αρνητική βαθμολογία.

Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ παίρνει την τιμή 0;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ναι, διότι η f(x) είναι συνεχής και $f(-1) < 0 < f(1)$.

Ερώτηση 2, χωρίς αρνητική βαθμολογία.

Ποια πρέπει να είναι η f(x), x > 0, ώστε το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $g(x) = f(x^2)$ να ισούται με $ημ(x^2) + c$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχομε $f(x^2) = (ημ(x^2)' = 2x\, συν(x^2)$, άρα $f(x) = 2x^{1/2}συν(x)$.

Ερώτηση 3, χωρίς αρνητική βαθμολογία.

Μπορεί 3 διανύσματα στο επίπεδο R^2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι, γιατί υπάρχουν δύο το πολύ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο R^2.

Ερώτηση 4, χωρίς αρνητική βαθμολογία.

Έστω Α πίνακας αxβ και Β πίνακας γxδ.

Όταν μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός ΒΑ, ποιας μορφής πρέπει να είναι ο πίνακας ΒΑ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: γxβ.

Ερώτηση 5, χωρίς αρνητική βαθμολογία.

Βρείτε ποια είναι η τιμή του άπειρου αθροίσματος (σειράς)

$1/3 + (1/3)^2 + (1/3)^3 + (1/3)^4 + (1/3)^5 + ...(1/3)^n + ...$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1/2

Ερώτηση 6, με αρνητική βαθμολογία.

Ένα γραμμικό ομογενές σύστημα εξισώσεων με 5 εξισώσεις και 6 αγνώστους x, y, z, w, s, t, επαληθεύεται από τις τιμές

(x, y, z, w, s, t) = (1, 2, 3, 4, 5, 6),

(x, y, z, w, s, t) = (1, 1, 2, 2, 1, 2),

(x, y, z, w, s, t) = (3, 0, 3, 1, 0, 2).

Είναι σίγουρη λύση η (x, y, z, w, s, t) = (-6, 5. -1, 7, 11, 8);

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Εξετάζουμε την εξίσωση

$$(-6, 5. -1, 7, 11, 8) = α(1, 2, 3, 4, 5, 6) + β(1, 1, 2, 2, 1, 2) - γ(3, 0, 3, 1, 0, 2)$$

και διαπιστώνουμε ότι λύνεται (βρίσκουμε α = 2, β = 1, γ = -3).

Άρα το (-6, 5. -1, 7, 11, 8), ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων ενός ομογενούς συστήματος εξισώσεων, είναι λύση.

Ερώτηση 7, ελεύθερου κειμένου.

Έστω συνάρτηση $f(x)$, ορισμένη σε όλο το R, με την ιδιότητα:

το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x + \pi/2)$ να ισούται με $f(x) + c$, όπου c σταθερά.

Δείξτε ότι υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχουμε ότι $f'(x) = f(x + \pi/2)$.

Θα δείξουμε ότι αν δεν υπάρχει το x_0 έχουμε άτοπο.

Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο x_0. Τότε η $f(x)$ λόγω συνέχειας είναι πάντα θετική ή πάντα αρνητική.

Εξετάζουμε την περίπτωση να είναι πάντα θετική.

(Η περίπτωση η $f(x)$ να είναι πάντα αρνητική, ανάγεται στη περίπτωση να είναι πάντα θετική: θέτοντας $g(x) = - f(x)$, οπότε $g'(x) = g(x + \pi/2)$ με την $g(x)$ να είναι πάντα θετική.)

Τότε η $f'(x)$ είναι πάντα θετική, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Από το Θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi = \xi(x)$ στο $(0, \pi/2)$ ώστε

$$f(x + \pi/2) - f(x) = f'(x + \xi)\pi/2,$$

άρα $f(x + \pi/2) - f(x) = f(x + \xi + \pi/2)\pi/2$.

Αλλά $\pi/2 > 1$, οπότε $f(x + \pi/2) - f(x) > f(x + \xi + \pi/2)$.

Άρα $f(x + \pi/2) > f(x + \xi + \pi/2)$ ενώ $x + \pi/2 < x + \pi/2 + \xi$, άτοπο.