Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

Κεφάλαιο #2 (2019-20)

ΟΡΙΣΜΟΣ $m \times n$ ΠΙΝΑΚΑ

Ένας $m \times n$ πίνακας A είναι μια παράθεση πραγματικών αριθμών σε γραμμές και στήλες ως ακολούθως:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Λέμε ότι ο πίνακας A έχει m γραμμές και n στήλες και το στοιχείο του πίνακα A που βρίσκεται στην $ij-$θέση, δηλαδή, στην $i-$γραμμή και $j-$ στήλη, το συμβολίζουμε με a_{ij}. Ως εκ τούτου, συχνά γράφουμε τον πίνακα A ως

$$A \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} (a_{ij})$$

όπου $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(m,n)$ το σύνολο των πινάκων με m γραμμές και n στήλες.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΙΝΑΚΩΝ

(α) Πρόσθεση

Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ δύο $m \times n$ πίνακες,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε το άθροισμά τους $A + B := C$ να είναι ο πίνακας $C = (c_{ij})$ όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ για όλα τα ij, δηλαδή

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

(β) Πολλαπλασιασμός

Έστω $A \in \mathcal{M}(m,n)$ και $B \in \mathcal{M}(l,k)$. Το γινόμενο AB ορίζεται αν και μόνο αν

$n = l$, δηλαδή, αν ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα A ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα B. Ο πίνακας γινόμενο AB έχει m γραμμές και k στήλες, δηλαδή, $AB \in \mathcal{M}(m, k)$.

Παραδείγματα:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{pmatrix}$.

Σημειωτέον ότι ο πρώτος πίνακας είναι $\mathbf{1}\times 2$ πίνακας, ο δεύτερος είναι $2\times\mathbf{3}$ και το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι ένας $\mathbf{1}\times\mathbf{3}$ πίνακας.

Το γινόμενο $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ δεν ορίζεται διότι ο πρώτος πίνακας έχει 3 στήλες και ο δεύτερος 1 γραμμή.

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-4) & 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot(-4) & 0\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Τετραγωνικοι πινακες

Ένας πίνακας A λέγεται *τετραγωνικός* αν ο αριθμός των γραμμών του ισούται με τον αριθμό των στηλών του.

Το αποτέλεσμα του γινομένου στο παράδειγμα (ii) παραπάνω είναι ένας τετραγωνικός 2×2 πίνακας.

Οι τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες συμβολίζονται με $\mathcal{M}(n)$. Ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας που έχει την μονάδα 1 σε κάθε θέση της κυρίας διαγωνίου και 0 σε κάθε άλλη θέση ονομάζεται *ταυτοτικός* και συμβολίζεται με I_n. Για παράδειγμα, ο παρακάτω πίνακας είναι ο ταυτοτικός 5×5 πίνακας.

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Γενικά, $I_n = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ όπου $a_{ii} = 1$ και $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$.

Παρατήρηση: Αν $A \in \mathcal{M}(n)$, τότε ισχύει $AI_n = I_nA = A$, γεγονός που δικαιολογεί την ορολογία «ταυτοτικός» για τον I_n.

Ορισμός. Ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathcal{M}(n)$, είναι ένας τετραγωνικός πίνακας ίδιας διάστασης, συμβολισμός $A^{-1} \in \mathcal{M}(n)$, έτσι ώστε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Εάν ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε ο A λέγεται **αντιστρέψιμος.** Σημειωτέον ότι δεν έχουν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντίστροφο αλλά όταν ο αντίστροφος υπάρχει είναι ένας και μοναδικός. Στην συνέχεια θα διατυπώσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη του αντιστρόφου ενός πίνακα.

Ιδιότητες τετραγωνικών πινάκων. Έστω $A, B, C \in \mathcal{M}(n)$. Για $A = (a_{ij})$ συμβολίζουμε με λA τον πίνακα που στην $ij-$θέση έχει το στοιχείο λa_{ij}.

(1) $A + B = B + A$ (2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (4) $A \cdot (\lambda B) = \lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B$.

Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, δηλαδή, εν γένει $AB \neq BA$.

4. Τάξη Πίνακα

Έστω $A \in \mathcal{M}(m, n)$ ένας $m \times n$ πίνακας. Θεωρούμε κάθε γραμμή του Α ως διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Η **τάξη** του πίνακα A είναι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών.

(α) Κλιμακωτοί Πίνακες

Ένας πίνακας A λέγεται **κλιμακωτός** αν ισχύουν τα εξής:

(i) Το στοιχείο a_{11} του A στην 1η γραμμή και πρώτη στήλη είναι διάφορο του μηδενός ($a_{11} \neq 0$).

(ii) Το $1^{\text{ο}}$ μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το $1^{\text{ο}}$ μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής. Συμβολικά,

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{i_0 j_0} & \neq & 0 \quad \text{και} \\ a_{i_0 j} & = & 0, \quad \forall j < j_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_{(i_0-1)\, j'} \neq 0 \text{ για κάποιο } j' < j_0.$$

(iii) Οι μηδενικές γραμμές βρίσκονται στο τέλος του πίνακα.

Παραδείγματα:

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός.

Το στοιχείο 8 στην 32−θέση του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν ικανοποιεί την συνθήκη (ii) παραπάνω, άρα ο πίνακας δεν είναι κλιμακωτός.

Παρομοίως οι πίνακες $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ δεν είναι κλιμακωτοί.

Πρόταση: Η τάξη ενός κλιμακωτού πίνακα ισούται με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών του.

(β) Μετατροπή πίνακα σε κλιμακωτό

Υπάρχει μία καλά ορισμένη επαναληπτική διαδικασία (μέθοδος απαλοιφής Gauss) η οποία μετατρέπει κάθε πίνακα A σε κλιμακωτό. Η μέθοδος στηρίζεται στο γεγονός ότι

- πολλαπλασιάζοντας μια γραμμή με ένα μη-μηδενικό αριθμό,
- προσθέτοντας μια γραμμή σε μια άλλη γραμμή και
- εναλλάσσοντας την θέση δύο γραμμών (ή στηλών),

η τάξη του πίνακα που προκύπτει δεν αλλάζει.

Εφαρμόζοντας στην συνέχεια πράξεις μεταξύ γραμμών των τριών παραπάνω τύπων, ο τυχαίος πίνακας μετατρέπεται σε κλιμακωτό.

Παράδειγμα: Ο συμβολισμός $\xrightarrow{\lambda r_i + r_j}$ σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε την $i-$γραμμή με λ και την προσθέτουμε στην $j-$γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{3}r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Η πρώτη πράξη μηδενίζει τον αριθμό 2 στην 21−θέση και η δεύτερη τον αριθμό 3 στην 31–θέση. Η τρίτη πράξη μηδενίζει το -2 στην 32–θέση.

5. Οριζουσες τετραγωνικων πινακων 2×2 και 3×3.

Η ορίζουσα $det(A)$ του τετραγωνικού 2×2 πίνακα $A=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ ισούται εξ ορισμού με $det(A):=ad-bc$. Ένας άλλος συνηθισμένος συμβολισμός για την ορίζουσα του πίνακα A είναι ο εξής:

$$det(A)=det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\overset{\text{συμβ.}}{\equiv}\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc.$$

Η ορίζουσα $det(A)$ του τετραγωνικού 3×3 πίνακα $A=\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{smallmatrix}\right)$ ισούται με

$$det(A):=a_{11}\,det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}-a_{12}\,det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}+a_{13}\,det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}.$$

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα υπολογίζεται και από την παρακάτω παράσταση:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

Επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε την ορίζουσα ενός τετραγωνικού $n\times n$ πίνακα για κάθε φυσικό n.

Γεωμετρική Σημασία ορίζουσας. Έστω τα διανύσματα $u=(x_1,x_2), v=(y_1,y_2)$ στο επιπεδο $\mathbb{R}^2$. Το εμβαδόν E του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα u,v ισούται με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα $\begin{pmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}$. Δηλαδή $E=|det(A)|$.

Έστω τα διανύσματα $u=(x_1,x_2,x_3), v=(y_1,y_2,y_3)$ και $w=(z_1,z_2,z_3)$ στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^3$. Ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα u,v,w ισούται με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του 3×3 πίνακα $A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}$. Δηλαδή $V=|det(A)|$.

Πρόταση: Έστω $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας. Αν $det(A)\neq 0$ τότε υπάρχει ο αντίστροφος A^{-1} του A και ισούται με

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{d}{det(A)} & \frac{-b}{det(A)}\\ \frac{-c}{det(A)} & \frac{a}{det(A)}\end{pmatrix}.$$

Πρόταση: Έστω $A, B \in \mathcal{M}(n)$ τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες. Τότε ισχύει

$$det(AB) = det(A)\, det(B).$$

Ιδιότητες Οριζουσών: 1) Αν σε μια γραμμή (αντ. στήλη) προσθέσουμε μια άλλη γραμμή, διατηρώντας όλες τις άλλες γραμμές (αντ. στήλες) αμετάβλητες, η ορίζουσα παραμένει η ίδια.
2) Ένας πίνακας με δύο ίδιες γραμμές (αντ. στήλες) έχει ορίζουσα ίση με μηδέν.
3) Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή (αντ. στήλη) με ενα πραγματικό αριθμό λ τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ.

Θεώρημα: Έστω $A \in \mathcal{M}(n)$ τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Ο πίνακας A ειναι αντιστρέψιμος, δηλαδή, υπάρχει ο A^{-1}.
- $det(A) \neq 0$.
- Η τάξη του πίνακα A ισούται με n.

Ασκήσεις

1. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Να εξετάσετε ποιά από τα γινόμενα $AA, AB, BA, BB, BC, CB, CC, AC, CA$ υπάρχουν και, όποια υπάρχουν, να τα υπολογίσετε.

2. Να βρείτε την τάξη καθενός από τους παρακάτω πίνακες:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   [Απ: $3, 3, 3$]

3. Είναι δυνατόν ένας 2×3 πίνακας να έχει τάξη 3?
   Υπόδειξη: ποιός ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^2$?

4. Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, υπάρχει πίνακας X (κατάλληλης διάστασης) έτσι ώστε $XA = B$?

$\left[\text{Υπόδειξη: } \det A = 1 \neq 0 \text{ άρα υπάρχει ο } A^{-1}.\right]$

5. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, υπάρχει πίνακας X (κατάλληλης διάστασης) έτσι ώστε $AX = B$?

Υπόδειξη: $\det A = 0, \det B \neq 0$ άρα, αν υπήρχε τέτοιος πίνακας X

$$0 = \det(A)\det(X) = \det(AX) = \det(B) \neq 0.$$

Εναλλακτικά, διαπιστώστε ότι το σύστημα που προκύπτει από την εξίσωση πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

δεν έχει λύση.

6. Όμοια με την Άσκηση 5 με τον πίνακα B να είναι $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη: Η αντίστοιχη εξίσωση $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$ δίνει το σύστημα $\left\{\begin{array}{r} z + 2z = 4 \\ y + 2w = 1 \end{array}\right\}$ που έχει άπειρες λύσεις, φερ΄ ειπείν, $x = 4, y = 1, z = w = 0 \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.