Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

Κεφάλαιο #9 (2020-21)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1 Εισαγωγή

Υπάρχει μεγάλη ποικιλία από επιστημονικά προβλήματα στα οποία το χαρακτηριστικό αίτημα είναι ο προσδιορισμός μιας ποσότητας από τον ρυθμό μεταβολής της, από την ταχύτητα δηλαδή με την οποία αλλάζουν οι τιμές της. Για παράδειγμα: ο προσδιορισμός της θέσης ενός αντικειμένου από την γνώση της ταχύτητας και/ή της επιτάχυνσής του· ο προσδιορισμός της ποσότητας ραδιενεργούς ουσίας που απομένει μετά από ένα δοσμένο χρονικό διάστημα αν γνωρίζουμε τον ρυθμό αποσύνθεσής της. Σε παραδείγματα όπως αυτά προσπαθούμε να προσδιορίσουμε μια άγνωστη συνάρτηση από μερικές πληροφορίες που μπορούν να εκφραστούν σε μορφή μιας σχέσης αναφερόμενης σε τουλάχιστο μια από τις παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης. Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται διαφορικές εξισώσεις και ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την σπουδή τους είναι διαχρονικά στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος και της μελέτης των ερευνητών.

Οι διαφορικές εξισώσεις (Δ.Ε.) κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες: στις **συνήθεις Δ.Ε.**, στις οποίες η ζητούμενη συνάρτηση είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής και στις **Δ.Ε. με μερικές παραγώγους**, όπου η ζητούμενη συνάρτηση είναι συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Ένα απλό παράδειγμα μιας συνήθους Δ.Ε. είναι η σχέση

$$f'(x) = f(x) \tag{1}$$

η οποία ικανοποιείται από την εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$. Θα δούμε παρακάτω ότι κάθε λύση της (;;) είναι της μορφής $f(x) = Ce^x$, όπου C τυχούσα σταθερά.

Η σχέση

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y}$$

είναι παράδειγμα Δ.Ε. με μερικές παραγώγους. Αυτή ειδικά η Δ.Ε. λέγεται εξίσωση του Laplace και παρουσιάζεται στη θεωρία του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού, στη μηχανική των ρευστών και άλλού. Το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης Laplace περιέχει διαφόρων ειδών συναρτήσεις μεταξύ των οποίων

$$f(x,y)=x+2y, f(x,y)=e^{x}cosy, f(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right).$$

Η συστηματική μελέτη των Δ.Ε. άρχισε από τον καιρό του Newton και του Leibniz και συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Στις παρούσες σημειώσεις θα ασχοληθούμε με τους απλούστερους τύπους συνήθων Δ.Ε. και θα τις εφαρμόσουμε για να επιλύσουμε κάποια φυσικά προβλήματα τα οποία εκφράζονται (μοντελοποιούνται) με αυτές. Η επίλυση των Δ.Ε. τις οποίες θα θεωρήσουμε θα γίνει με την βοήθεια κάποιων πολύ ειδικών τεχνασμάτων.

Όταν εργαζόμαστε με μια Δ.Ε. γράφουμε συνήθως y αντί για $f(x)$, y' αντί για $f'(x)$ και σημειώνουμε τις παραγώγους ανώτερης τάξης με y'', y''' κ.λ.π., χωρίς αυτό φυσικά να εμποδίζει την χρησιμοποίηση και άλλων γραμμάτων για την παράσταση της συνάρτησης και των παραγώγων της.

Ένας άλλος συμβολισμός για τις παραγώγους που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτός του Leibniz σύμφωνα με τον οποίο τις παραγώγους y', y'', y''' κ.λ.π. μιας συνάρτησης $y(x)$ τις συμβολίζουμε με $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ κ.λ.π. αντίστοιχα.

Μερικά παραδείγματα συνήθων Δ.Ε. είναι τα εξής:

$$\frac{dy}{dx}=7x^2+2x+1 \qquad e^{y}y''+2\left(y'\right)^2=1$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3}+\sin x\frac{d^2y}{dx^2}+5xy=0 \qquad y'+e^{x}y=cosx.$$

Στις παραπάνω Δ.Ε. η άγνωστη συνάρτηση είναι η $y(x)$ και η Δ.Ε. είναι μια σχέση μεταξύ της $y(x)$ και των παραγώγων της $y(x)$.

2 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Τάξη μίας Δ.Ε. είναι η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Για παράδειγμα:

- Η Δ.Ε. $y'''e^{7x}y''+5x^7y=0$ έχει τάξη 3.
- Η Δ.Ε. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+y^7\frac{dy}{dx}=5x$ έχει τάξη 2.
- Η Δ.Ε. $y'=3x^2+5x-7$ έχει τάξη 1.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 *Λύση μιας Δ.Ε. με άγνωστη συνάρτηση y και ανεξάρτητη μεταβλητή x στο διάστημα I καλείται μια συνάρτηση $y(x)$ η οποία ικανοποιεί ταυτοτικά την Δ.Ε. για κάθε x στο I.*

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ είναι μία λύση της Δ.Ε.

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Πράγματι, υπολογίζουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο

$$\begin{aligned} y' &= -2e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = -e^{-x} - xe^{-x} \\ y'' &= e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x} \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην Δ.Ε. έχουμε

$$(xe^{-x}) + 2(-e^{-x} - xe^{-x}) + (2e^{-x} + xe^{-x}) = xe^{-x} - 2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^{-x} + xe^{-x} = 0.$$

Μερική λύση ονομάζεται μια οποιαδήποτε λύση της Δ.Ε.
Γενική λύση μιας Δ.Ε. είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι λύσεις της Δ.Ε.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $y(x) = \frac{x^4}{2}$ είναι μία μερική λύση της Δ.Ε.

$$y'x - 2y - x^4 = 0 \tag{2}$$

αφού $y'(x) = 2x^3$ και άρα

$$y'x - 2y - x^4 = (2x^3)x - 2\left(\frac{x^4}{2}\right) = 2x^4 - x^4 - x^4 = 0.$$

Παρομοίως, η συνάρτηση $y(x) = \frac{x^4}{2} + 500x^2$ είναι επίσης μερική λύση. Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι κάθε λύση της Δ.Ε. (;;) είναι της μορφής

$$y(x) = \frac{x^4}{2} + cx^2$$

για κάποιο πραγματικό αριθμό c. Με άλλα λόγια η γενική λύση της Δ.Ε. (;;) είναι

$$y(x) = \frac{x^4}{2} + cx^2, c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

2.1 Προβλήματα αρχικών τιμών

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, με την επίλυση Δ.Ε. απαντάμε, μεταξύ άλλων, σε προβλήματα προσδιορισμού μίας ποσότητας από πληροφορίες σχετικά με το ρυθμό μεταβολής της. Αν, για παράδειγμα, έχουμε μία διαρροή ραδιενεργού υλικού σήμερα και θέλουμε να μάθουμε την ακριβή (αριθμητικά) ποσότητα που θα υπάρχει σε 5 χρόνια, θα πρέπει προφανώς να γνωρίζουμε την ποσότητα που αρχικώς διέρρευσε. Δηλαδή, θα πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή της ζητούμενης συνάρτησης την χρονική στιγμή 0 (ή γενικά, σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της). Οι Δ.Ε. που συνοδεύονται από μία συνθήκη που πρέπει να πληροί η ζητούμενη συνάρτηση ονομάζονται **Δ.Ε. μα αρχικές συνθήκες** ή αλλιώς **προβλήματα αρχικών τιμών.**

Παράδειγμα: Η Δ.Ε. (;;) μαζί με την απαίτηση $y(2) = 20$ είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.
Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα βρίσκουμε πρώτα την γενική λύση (βλέπε σχέση (;;) παραπάνω) και από το σύνολο των λύσεων αναζητούμε ποιά συγκεκριμένη συνάρτηση ικανοποιεί την δοθείσα σχέση που εδώ είναι

$$20 = y(2) = \frac{2^4}{2} + c2^2 \iff 20 = 8 + 4c \iff c = 3.$$

Άρα, η μοναδική (μερική) λύση στο δοθέν πρόβλημα είναι $y(x) = \frac{x^4}{2} + 3x^2$.

2.2 Εκπεφρασμένες και Πεπλεγμένες λύσεις Δ.Ε.

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα οι λύσεις (μερικές ή γενικές) που αναφέρθηκαν εκφράζονταν μέσω συγκεκριμένων συναρτήσεων ως προς x. Δηλαδή οι λύσεις ήταν της μορφής

$$y = F(x, C), C \in \mathbb{R} \tag{4}$$

για κάποια συνάρτηση F. Όταν η λύση μιας Δ.Ε. δίνεται με την μορφή (;;) λέμε ότι η λύση είναι σε **εκπεφρασμένη** μορφή. Αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Αυτό που συμβαίνει πολύ συχνά είναι να καταλήξουμε σε μία σχέση της μορφής

$$G(x, y, c) = 0, c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις λέμε ότι οι λύσεις της Δ.Ε. εκφράζονται σε **πεπλεγμένη** μορφή από την παραπάνω σχέση.

Παράδειγμα: Παρακάτω θα μάθουμε να λύνουμε την Δ.Ε.

$$y = \frac{y - x}{y + x}$$

και όπως θα δούμε η λύση ορίζεται πεπλεγμένα από την σχέση

$$\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c=0. \tag{6}$$

Θα ήταν μάταιη κάθε απόπειρα επίλυσης ως προς y της εξίσωσης αυτής. Σε τέτοιες καταστάσεις περιοριζόμαστε να λέμε απλά ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει μια οικογένεια λύσεων και συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς c δίνει και από μία ειδική λύση της Δ.Ε.

3 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Στο εξής θα ασχοληθούμε μόνο με <u>*συνήθεις Δ.Ε. πρώτης τάξης*</u>, δηλαδή, με Δ.Ε. που η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής και στην εξίσωση εμφανίζεται μόνο η πρώτη παράγωγος. Πιο συγκεκριμένα, θα περιγράψουμε την μεθοδολογία επίλυσης δύο ειδικών κατηγοριών Δ.Ε. πρώτης τάξης.

Η γενική μορφή μιας Δ.Ε. πρώτης τάξης είναι

$$y' = f(x,y) \tag{7}$$

Για παράδειγμα,

$$y' + e^x y = xy \quad \text{και} \quad y' = \frac{y^2-x}{xy}$$

είναι Δ.Ε. πρώτης τάξης.

Ισχύει το εξής θεμελιώδες θεώρημα για τις συνήθεις Δ.Ε. πρώτης τάξης, που αφορά την ύπαρξη και το μονοσήμαντο της λύσης αυτών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 *Έστω η Δ.Ε. $y' = f(x,y)$ και (x_0,y_0) σημείο στο πεδίο ορισμού της f. Αν ισχύει ότι*

- *f συνεχής στο ορθογώνιο $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-x_0|<\varepsilon, |y-y_0|<\varepsilon\}$*
- *$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ είναι συνεχής στο R*

τότε υπάρχει μοναδική λύση $y(x)$ της Δ.Ε. $y' = f(x,y)$ με την ιδιότητα $y(x_0)=y_0$.

3.1 Συνήθεις Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές

Οι Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές είναι αυτές που η συνάρτηση $f(x,y)$ στην σχέση (;;) είναι το γινόμενο δύο συναρτήσεων $h(x)$ και $g(y)$. Συνεπώς, η γενική μορφή μιας Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές είναι

$$y' = h(x)g(y) \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας $y' = \dfrac{dy}{dx}$ έχουμε (για $g(y) \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \iff \frac{1}{g(y)}dy = h(x)dx$$

και η εύρεση της λύσης επιτυγχάνεται εκτελώντας τις δύο παρακάτω ολοκληρώσεις (ως προς x και ως προς y)

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx$$

Παράδειγμα: Επίλυση της Δ.Ε. $xdx - y^2dy = 0$
Έχουμε $xdx = y^2dy \iff \int xdx = \int y^2dy \iff \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{y^3}{3} + C \iff y = \sqrt[3]{\dfrac{3x^2}{2} - 3C}$.

Παράδειγμα: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$e^x dx - ydy = 0 \quad \text{με} \quad y(0) = 1.$$

Υπολογίζουμε

$$e^x dx - ydy = 0 \iff e^x dx = ydy \iff \int e^x dx = \int ydy \iff e^x = \frac{y^2}{2} - C$$

και συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y^2 = 2e^x + 2C.$$

Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $y(0) = 1$, πρέπει

$$y(0)^2 = 2e^0 + 2C \iff 1 = 2 + 2C \iff C = -\frac{1}{2}.$$

Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y^2 = 2e^x - 2\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad y = \sqrt{2e^x - 1}.$$

Σημειωτέον ότι η συνάρτηση $y(x) = -\sqrt{2e^x - 1}$ παρ´ όλο που είναι λύση της Δ.Ε., δεν αποτελεί λύση του δοσμένου προβλήματος αρχικών τιμών διότι $y(0) = -\sqrt{2e^0 - 1} = -1$, δηλαδή, δεν πληροί την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$.

Παράδειγμα: Επίλυση της Δ.Ε. $xy\,(1 + x^2)\,y' = 1 + y^2$.

Υποθέτοντας $x \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{y}{1+y^2}y' = \frac{1}{x\left(x^2+1\right)} \quad &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{\left(y^2\right)'}{1+y^2}dy = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x}{\left(x^2+1\right)}\right]dx \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\log\left(1+y^2\right) = \log x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + C \\
&\Longleftrightarrow \quad \log\left(1+y^2\right) = 2\log x - \log\left(1+x^2\right) + 2C \\
&\Longleftrightarrow \quad 1+y^2 = e^{2\ln(x)-\ln\left(x^2+1\right)+2C} = \frac{x^2e^{2C}}{x^2+1} \\
&\Longleftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{e^{2C}x^2}{x^2+1} - 1}.
\end{aligned}$$

3.2 Γραμμικές Δ.Ε.

Μια πρώτης τάξης Δ.Ε. εξίσωση λέγεται **γραμμική** αν είναι της μορφής

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{9}$$

όπου p, q είναι συνεχείς ως προς x συναρτήσεις. Αν $q(x) = 0$ τότε η εξίσωση (;;) γίνεται

$$y' + p(x)y = 0 \tag{10}$$

η οποία λέγεται *ομογενής* γραμμική Δ.Ε.

Η ορολογία «γραμμική» προέρχεται από το γεγονός ότι αν $y_1(x), y_2(x)$ είναι δύο λύσεις της ομογενούς τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ είναι επίσης λύση της (;;):

$$\begin{aligned}
\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)' + \left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)p(x) \quad &= \quad \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + \lambda_1 y_1 p(x) + \lambda_2 y_2 p(x) \\
&= \quad \lambda_1\left(y_1' + p(x)y_1\right) + \lambda_2\left(y_2' + p(x)y_2\right) \\
&= \quad \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0
\end{aligned}$$

Επίλυση γραμμικής Δ.Ε.: Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (;;) με κατάλληλη συνάρτηση $v(x)$ έτσι ώστε το αριστερά μέλος της εξίσωσης (;;) να ισούται με την παράγωγο $\left(v(x)y\right)'$ της συνάρτησης $v(x)y$. Η συνάρτηση αυτή είναι η

$$v(x) = e^{\int p(x)dx}$$

αφού

$$\begin{aligned}
\left(v(x)y\right)' = \left(e^{\int p(x)dx}y\right)' \quad &= \quad \left(e^{\int p(x)dx}\right)'y + e^{\int p(x)dx}y' \\
&= \quad e^{\int p(x)dx}\left(\int p(x)dx\right)' + e^{\int p(x)dx}y' \\
&= \quad v(x)p(x) + v(x)y' = v(x)\left(y' + p(x)\right).
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$v(x)y = \int q(x)v(x)dx + C \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{v(x)}\left(\int q(x)v(x)dx + C\right)$$

όπου $v(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Συνεπώς η γενική λύση της γραμμικής εξίσωσης (;;) είναι

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right), C \in \mathbb{R}.} \tag{11}$$

Παράδειγμα: Επίλυση της $y'x = x^2 + 3y, x > 0$.

Μεταρέπουμε την Δ.Ε. στην μορφή $y' + p(x)y = q(x)$:

$$y'x - 3y = x^2 \Longleftrightarrow y' + \frac{-3}{x}y = x \quad \text{με} \quad \begin{cases} p(x) = -3/x \\ q(x) = x \end{cases}$$

Υπολογίζουμε $v(x) = e^{\int \frac{-3}{x}dx} = e^{-3\int \frac{1}{x}dx} = e^{-3\log x} = \left(e^{\log x}\right)^{-3} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

και από τον τύπο (;;) έχουμε

$$y(x) = \frac{1}{1/x^3}\left(\int x\frac{1}{x^3}dx + C\right) = x^3\left(\int \frac{1}{x^2}dx + C\right) = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right) = -x^2 + Cx^3.$$

Παράδειγμα: Επίλυση της $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Από τον τύπο (;;) και για $p(x) = 2x, q(x) = 2xe^{-x^2}$ έχουμε

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int 2xdx}\left(\int 2xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx + C\right) = e^{-x^2}\left(\int 2xe^{-x^2}e^{x^2}dx + C\right) \\ &= e^{-x^2}\left(\int 2xdx + C\right) = e^{-x^2}\left(x^2 + C\right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1,\ y(1) = \frac{1}{2}.$$

Για την γραμμική Δ.Ε.

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1 \Longleftrightarrow y' + \underbrace{\frac{2}{t}}_{p(x)}\ y = \underbrace{\frac{t^2 - t + 1}{t}}_{q(x)}$$

υπολογίζουμε $v(x) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\log t} = t^2$ και η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{t^2}\left(\int \frac{t^2 - t + 1}{t}t^2dt + C\right) = \frac{1}{t^2}\left(\int \left(t^3 - t^2 + t\right)dt + C\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C\right) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{t^2} \end{aligned}$$

Θέτοντας $t = 1$ προσδιορίζουμε το C ώστε $y(1) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = y(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{1} \Longleftrightarrow C = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Εφαρμογή: Γνωρίζουμε ότι ο σχετικός ρυθμός αύξησης ενός πληθυσμού βακτηρίων είναι ανάλογος του πληθυσμού. Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ ο πληθυσμός είναι 200 και την χρονική στιγμή $t = 10h$ είναι 280 να βρεθεί ο πληθυσμός των βακτηρίων την χρονική στιγμή $t = 30h$.

Έστω $P(t)$ ο πληθυσμός την χρονική στιγμή t. Μας δίνεται ότι

$$P' = kP$$

για κάποια σταθερά $k > 0$. Λύνουμε αυτήν την πρώτης τάξης Δ.Ε. και έχουμε

$$\frac{1}{P}dP = kdt \iff \log P = kt + C \iff \boxed{P(t) = e^C e^{kt}}$$

Αυτή είναι η γενική λύση και από τα δεδομένα μας θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις σταθερές k και C δηλαδή να βρούμε την συγκεκριμένη (μερική) λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες που έχουμε:

Αφού $P(0) = 200 \Longrightarrow 200 = e^C e^0 = e^C$ άρα $\boxed{P(t) = 200\, e^{kt}}$

Αφού $P(10) = 280 \Longrightarrow \dfrac{280}{200} = e^{10k} \Longrightarrow k = \dfrac{1}{10}\log\dfrac{280}{200} \approx 0,033$ άρα

$$\boxed{P(t) = 200\, e^{0,033\, t}}.$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το πληθυσμό σε οιαδήποτε χρονική στιγμή:

$$P(30) = 200\ e^{0,033 \cdot 30} = 200\ e^{0,99} \approx 200 \cdot 2,71 = 542.$$

1. Να βρεθεί η γενική λύση κάθε μιας εκ των παρακάτω (χωριζόμενων μεταβλητών) Δ.Ε.

   (a) $y' = y^2x^3$ $\left[\text{Απ: } y = -\frac{4}{x^4+C}\right]$

   (b) $x\,dx + \dfrac{1}{y}\,dy = 0$ $\left[\text{Απ: } y = e^{-\frac{x^2}{2}+C}\right]$

   (c) $y' = \dfrac{y}{x^2}$ $\left[\text{Απ: } y = e^{-\frac{1}{x}+C}\right]$

   (d) $y' = \dfrac{xe^x}{2y}$ $\left[\text{Απ: } y = \pm\sqrt{e^x x - e^x + C}\right]$

2. Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

   (a) $\sin x\,dx + y\,dy = 0,\ y(0) = -2$ $\left[\text{Απ: } y = -\sqrt{2\cos x + 2C},\ C = 1\right]$

   (b) $\left(x^2+1\right)dx + \dfrac{1}{y}\,dy = 0,\ y(-1) = 1$ $\left[\text{Απ: } y = e^{-\frac{x^3}{3}-x+C},\ C = -\frac{4}{3}\right]$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{2x-9}, x > 9/2, y(5) = 1$ $\left[\text{Απ: } y = -\frac{2}{\log(-9+2x)+C},\ C = -2\right]$

   (d) $-xe^{x^2-1} + yy' = 0, y(1) = 1$ $\left[\text{Απ: } y = \sqrt{e^{x^2-1}+C},\ C = 0\right]$

3. Να βρεθεί η γενική λύση κάθε μιας εκ των παρακάτω (γραμμικών) Δ.Ε.

   (a) $y' - y - 2x - 1 = 0$ $\left[\text{Απ: } v(x) = e^{-x},\ y = -2x - 3 + Ce^x\right]$

   (b) $y' + 2xy = 2x^3$ $\left[\text{Απ: } v(x) = e^{x^2},\ y = x^2 - 1 + \frac{C}{e^{x^2}}\right]$

   (c) $y' + y = \sin x$ $\left[\text{Απ: } v(x) = e^x,\ y = -\frac{\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{C}{e^x}\right]$

   (d) $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ $\left[\text{Απ: } v(x) = x,\ y = -\frac{1}{2x^3} + \frac{\log x}{x} - 1 + \frac{C}{x}\right]$

4. Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

   (a) $y' - 3y - x = 0, y(0) = 1$

   $\left[\text{Απ: } v(x) = e^{-3x},\ y = -\frac{3x+1}{9} + Ce^{3x},\ C = 10/9\right]$

   (b) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^4 - x^2 + x, x > 0, y(1) = 3/4$

   $\left[\text{Απ: } v(x) = \frac{1}{x},\ y = \frac{x^5}{4} - \frac{x^3}{2} + x^2 + Cx,\ C = 0\right]$

   (c) $y' + \dfrac{1}{x}y = e^{4x-1}, x > 0, y(1) = -1/2$

   $\left[\text{Απ: } v(x) = x,\ y = \frac{e^{4x-1}(4x-1)}{16x} + \frac{C}{x},\ C = -\frac{1}{2} - \frac{3e^3}{16}\right]$

   (d) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} + 3, x > 0, y(1) = 4$

   $\left[\text{Απ: } v(x) = x^2,\ y = \frac{1}{x} + 1 + x + \frac{C}{x^2},\ C = 1\right]$