

# Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

## Κεφάλαιο #6 (2019-20)

### ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω συνάρτηση  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  και  $x_0 \in (a, b)$ . Θα λέμε ότι η  $f$  είναι **παραγωγίσιμη στο  $x_0$**  όταν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  το οποίο το συμβολίζουμε με  $f'(x_0)$  και το λέμε παράγωγο της  $f$  στο  $x_0$ .

Αντί του  $f'(x_0)$  χρησιμοποιούνται συχνά και οι συμβολισμοί  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$  και  $\frac{df}{dx}(x_0)$ .

Μια συνάρτηση λέγεται **παραγωγίσιμη** αν υπάρχει η παράγωγός της για κάθε  $x_0 \in (a, b)$ . Σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση  $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ** Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι συνεχής.

**ΠΡΟΤΑΣΗ** (παράγωγοι συνήθων συναρτήσεων)

$$f(x) = c, c \text{ σταθερά, } x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = 0.$$

$$f(x) = x^n, n = 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = nx^{n-1}.$$

$$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = ax^{a-1}.$$

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = e^x.$$

$$f(x) = \log x, x > 0 \text{ τότε } f'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = \cos x.$$

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = -\sin x.$$

$$f(x) = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ τότε } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**Ιδιότητες:** Αν οι συναρτήσεις  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμες τότε είναι παραγωγίσιμες και οι συναρτήσεις

(1) άθροισμα  $f(x) + g(x)$  και ισχύει  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

(2) διαφορά  $f(x) - g(x)$  και ισχύει  $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

(4) γινόμενο  $f(x) \cdot g(x)$  και ισχύει  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) πηλίκο  $\frac{f(x)}{g(x)}$  και ισχύει  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(5) σύνθεση  $g(f(x))$  και ισχύει  $[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$   
(όταν ορίζεται)

## Παραδείγματα εφαρμογής των ιδιοτήτων:

- $(\sqrt{x} + \sin x)' \stackrel{\text{Iδ.}(1)}{=} (x^{\frac{1}{2}})' + (\sin x)' = \frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}-1}) + \cos x = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x.$
- $\left(\frac{\tan x - 1}{\cos x}\right)' \stackrel{\text{Iδ.}(4)}{=} \frac{(\tan x - 1)' \cos x - (\tan x - 1)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cos x - (\tan x - 1)(-\sin x)}{\cos^2 x}.$
- $(e^{\sin x})' \equiv \frac{d(e^{\sin x})}{dx} \stackrel{\text{Iδ.}(5)}{=} \frac{d(e^{\sin x})}{d(\sin x)} \frac{d(\sin x)}{dx} = e^{\sin x} (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x.$
- $(\log \sqrt{x^2 + 1})' \stackrel{\text{Iδ.}(5)}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{(x^2 + 1)'}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{x^2 + 1}.$

**ΚΑΝΟΝΑΣ L'HOPITAL** Έστω  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις και  $x_0 \in X$ . Αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$$

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , εφ' όσον το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει.

Σημείωση: Ο κανόνας ισχύει και όταν το πεδίο ορισμού των  $f, g$  περιέχει διάστημα της μορφής  $(a, +\infty)$  (αντίστ.  $(-\infty, a)$ ) και  $x \rightarrow +\infty$  (αντίστ.  $x \rightarrow -\infty$ ).

**Παράδειγμα 1:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (βλ. Πρόταση σελ. 5, ΚΕΦ.5)

Παρατηρούμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$  οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

**Παράδειγμα 2:** Για το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$  παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + \sin x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

**Παράδειγμα 3:** Μπορεί να απαιτηθεί η εφαρμογή του κανόνα L'Hopital περισσότερες από μία φορές: για το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$  παρατηρούμε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

**Παράδειγμα 4:** Σε κάποιες περιπτώσεις χρειάζεται να "δημιουργήσουμε" πηλίκo συναρτήσεων προκειμένου να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \log x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν για κάθε  $x \in (a, b)$  ισχύει

$f'(x) > 0$  τότε  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $(a, b)$

$f'(x) \geq 0$  τότε  $f$  αύξουσα στο  $(a, b)$

$f'(x) < 0$  τότε  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $(a, b)$

$f'(x) \leq 0$  τότε  $f$  φθίνουσα στο  $(a, b)$

**ΠΡΟΤΑΣΗ** Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  έχει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 \in (a, b)$  τότε  $f'(x_0) = 0$ .

Το αντίστροφο δεν ισχύει: η συνάρτηση  $f(x) = x^3$  δεν έχει τοπικό ακρότατο στο 0 αλλά η παράγωγός της  $f'(x) = 3x^2$  μηδενίζεται στο 0.

Αν η παράγωγος συνάρτηση  $f'$  είναι παραγωγίσιμη τότε λέμε ότι η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και την  $(f')'$  την συμβολίζουμε με  $f''$  και την λέμε δεύτερη παράγωγο της  $f$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ** Έστω  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και  $x_0 \in (a, b)$ .

(1) αν  $f'(x_0) = 0$  και  $f''(x_0) > 0$  τότε  $f$  έχει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$ .

(2) αν  $f'(x_0) = 0$  και  $f''(x_0) < 0$  τότε  $f$  έχει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ** Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$ . Τότε υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Παράδειγμα 5:** Η συνάρτηση  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$  έχει παράγωγο  $f'(x) = 2(x - 1)$  που μηδενίζεται στο σημείο 1 και  $f''(1) = 2 > 0$  συνεπώς παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $x = 1$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ** Έστω  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη και 1-1 συνάρτηση με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$ . Τότε η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

όπου  $y = f(x)$ .

**Παράδειγμα 6:** Η συνάρτηση της εφαπτομένης  $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1 και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Επίσης,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Από την προηγούμενη Πρόταση έπεται ότι παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι η συνάρτηση  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , διότι από τον τύπο έχουμε, για  $y = \tan x$ ,

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

**Εφαρμογή 7:** Να δειχθεί ότι  $e^x \geq 1 + x, x \in \mathbb{R}$ .

Θεωρούμε την συνάρτηση  $f(x) = e^x - x - 1$  η οποία έχει παραγώγους

$$f'(x) = e^x - 1 \quad \text{και} \quad f''(x) = e^x.$$

Στο σημείο 0 έχουμε  $f'(0) = 0$  και  $f''(0) = 1 > 0$ , άρα από το Θεώρημα η  $f$  έχει τοπικό ελάχιστο στο 0, δηλαδή,  $0 = f(0) \leq f(x)$  για όλα τα σημεία  $x$  σε ένα διάστημα  $(a, b) \ni 0$ . Όμως, η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  διότι η παράγωγός της  $f'(x) = e^x - 1 < 0$  για  $x \in (-\infty, 0)$ . Παρομοίως, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$  διότι η παράγωγός της  $f'(x) = e^x - 1 > 0$  για  $x \in (0, +\infty)$ . Άρα η  $f$  έχει ολικό ελάχιστο στο 0, δηλαδή,  $f(0) \leq f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , από όπου προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα

$$0 = f(0) \leq f(x) = e^x - x - 1 \implies e^x \geq 1 + x.$$

## Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$ . [Απ: 0]

2. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$ . [Απ:  $+\infty$ ]

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1 και το ότι  $e^x - x = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$ .

3. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά ή ολικά) και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . [Απ:  $-1$  τοπ. ελ.,  $1$  τοπ. μεγ.]

4. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά ή ολικά) και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = e^x - 2x$ . [Απ:  $\log 2$  ολικό ελάχιστο]

5. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά ή ολικά) και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = x^2 \log x$ . [Απ:  $1/\sqrt{e}$  ολικό ελάχιστο]

6. Να δείξετε ότι  $\log(x+1) - \log x < 1/x, x > 0$ .

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Εφαρμογής 6 και το ότι η  $e^x$  είναι γνησίως αύξουσα.

7. Δείξτε ότι  $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}, x > 0$ .

Υπόδειξη: Θεωρήστε την  $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$  και δείξτε ότι  $g'(x) > 0$  χρησιμοποιώντας την Εφαρμογή 7.

8. Για ποιά  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει η ανίσωση  $e^x > 1 - x$ ? [Απ:  $x > 0$ ]

Υπόδειξη: Θεωρήστε την  $f(x) = e^x + x$ .

9. Να δείξετε ότι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f_1(x) = e^{1-3x}$  και  $f_2(x) = 2x - 5$  τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την  $h(x) = e^{1-3x} - 2x + 5$  και δείξτε ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το  $\mathbb{R}$ . Στην συνέχεια χρησιμοποιήστε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty.$$