

1. α) [5] Δείξτε ότι τα διανύσματα  $\alpha = (1, 2, \lambda)$ ,  $\beta = (1, \lambda, 1)$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (για κάθε τιμή του  $\lambda$ ).

β) [10] Ένας υπόχωρος  $A$  έχει ως βάση τα διανύσματα  $\alpha = (1, 2, \lambda)$  και  $\beta = (1, \lambda, 1)$ , ποια πρέπει να είναι η τιμή του  $\lambda$  ώστε το διάνυσμα  $(1, 1, 1)$  να ανήκει στο  $A$ ;

2. Δίδεται ότι ο αντίστροφος του πίνακα  $A$  υπάρχει και ισούται με  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 33 \\ 0 & 66 \end{bmatrix}$ .

α) [5] Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ώστε  $A \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$ .

β) [5] Είναι ο πίνακας  $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$  αντιστρέψιμος;

3. α) [10] Να βρείτε την τάξη του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$  για τις διάφορες τιμές του

λ. Πότε είναι αντιστρέψιμος;

β) [5] Εκφράστε το σύστημα  $\Sigma$ :

$$\lambda x + y + z = 1$$

$$x + \lambda y + z = 2$$

$$x + y + \lambda z = 3$$

ως μια εξίσωση με τη βοήθεια πινάκων. Για ποια  $\lambda$  έχει λύση το σύστημα  $\Sigma$ ;

4. Δίδεται η συνάρτηση  $f(x) = x^7 + x^5 + 1$ .

α) [10] Βρείτε αν έχει τοπικά ακρότατα η  $f(x)$ .

β) [5] Έχει η  $f(x)$  αντίστροφη συνάρτηση;

5. [10] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx$$

6. [5] Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $\varphi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε  $\varphi(1) = 3$ ,  $\varphi(3) = 8$ . Δείξτε ότι υπάρχει  $\xi \in (1, 3)$  ώστε  $\varphi'(\xi) = 5/2$ .

7. [10] Να λυθεί η διαφορική εξίσωση  $y'y^2 = x + 1$ .

8. [10] Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης  $y = x^2$  και της ευθείας  $y = 1$ .

9. [10] Βρείτε αν υπάρχει  $\sigma$  ώστε

$$\sum_{v=1}^{+\infty} (\sigma + 3)^v = 7.$$