

ΘΕΡΜΙΚΗ ΔΙΑΣΤΟΛΗ

ΘΔ1) Ένας τοπογράφος-μηχανικός χρησιμοποιεί μια ατσάλινη μετροταινία μήκους 50 m σε θερμοκρασία 20 °C.

α) Ποιο είναι το μήκος της μετροταινίας μια ημέρα που η θερμοκρασία είναι 35°C; ($\alpha_{\text{steel}} = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)

β) Οι μετρήσεις που κάνει ο τοπογράφος τη συγκεκριμένη ημέρα υποεκτιμούν ή υπερεκτιμούν τις αποστάσεις;

γ) Αν πάρει μια μέτρηση ίση με 35,794 m, ποια είναι η πραγματική τιμή της απόστασης;

ΛΥΣΗ:

α) Από το νόμο που ισχύει για τη γραμμική διαστολή θα έχουμε ότι η αύξηση του μήκους θα είναι:

$$\Delta L = a \cdot L \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta L = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 15 \Rightarrow \Delta L = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Αυτό σημαίνει ότι το νέο μήκος της ταινίας θα είναι:

$$L' = L + \Delta L \Rightarrow L' = 50,009 \text{ m}$$

β) Ενώ η πραγματική απόσταση είναι ίση με 50,009 m η μετροταινία του μηχανικού δείχνει 50 m, άρα ο μηχανικός υποεκτιμά τις αποστάσεις χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη μετροταινία.

γ) Υποθέτοντας ότι η αύξηση του μήκους είναι ομοιόμορφη, τότε η ένδειξη των 50 m θα αντιστοιχεί σε πραγματικό μήκος ίσο με 50,009 m. Αυτό σημαίνει ότι η ένδειξη των 35,794 m θα αντιστοιχεί σε πραγματικό μήκος ίσο με:

$$50,009 \cdot \frac{35,794}{50} = 35,8 \text{ m.}$$

ΘΔ2) Ένα βυτιοφόρο φορτώνει 40.000 L καυσίμου και μεταβαίνει από μια περιοχή σε μια άλλη όπου η θερμοκρασία είναι 25°C χαμηλότερη.

α) Πόσα λίτρα καυσίμου θα παραδώσει;

β) Το βυτίο θα διασταλεί; Η διαστολή του παίζει κάποιο ρόλο στην απάντησή σας;

Δίνεται ότι $\gamma_{\text{καυσίμου}} = 9,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

ΛΥΣΗ:

α) Από την εξίσωση για τη διαστολή όγκου (κυβική διαστολή) έχω ότι η μεταβολή όγκου είναι

$$\Delta V = \gamma \cdot V \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta V = 9,5 \cdot 10^{-4} \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot (-25) \Rightarrow \Delta V = -950 \text{ L}$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι έχουμε μείωση όγκου οπότε το βυτιοφόρο θα παραδώσει καύσιμο όγκου $\Delta V = 40.000 - 950 \Rightarrow \boxed{V = 39.050 \text{ L}}$

β) Όχι, η διαστολή του βυτίου δεν παίζει ρόλο στην προηγούμενη απάντηση.

ΘΔ3) Ένα δοχείο χωρητικότητας 1000 L στους 10°C γεμίζει οριακά με νερό στη συγκεκριμένη θερμοκρασία. Το δοχείο μαζί με το νερό θερμαίνεται στους 30°C. Πόσο νερό θα χυθεί έξω από το δοχείο κατά τη θέρμανση;

Δίνονται $\gamma_{\text{νερού}} = 0,207 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ και $\alpha_{\text{γυαλιού}} = 3,25 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, και το γυαλί ισότροπο υλικό.

ΛΥΣΗ:

Αφού το γυαλί είναι ισότροπικό υλικό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο συντελεστής διαστολής όγκου θα είναι τριπλάσιος από τον γραμμικό συντελεστή που δίνεται, δηλαδή $\gamma_{\text{γυαλιού}} = 3 \cdot \alpha_{\text{γυαλιού}}$.

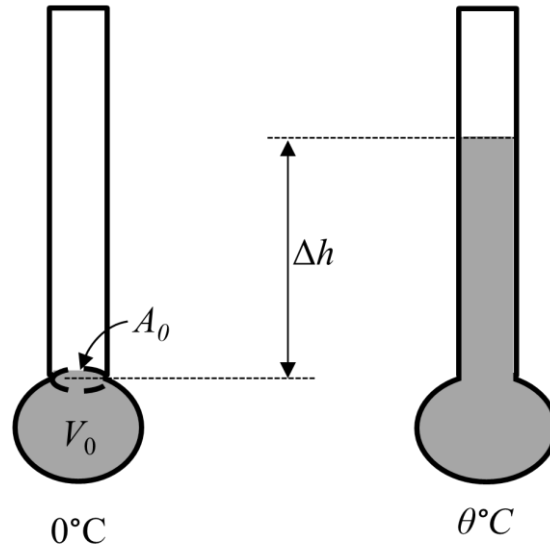
Ο όγκος (V) του νερού που χύνεται θα προκύψει από τη διαφορά της αύξησης του όγκου του γυαλιού, από την αύξηση του όγκου του νερού, δηλαδή:

$$\begin{aligned} V &= \Delta V_{\text{νερού}} - \Delta V_{\text{γυαλιού}} \Rightarrow V = \gamma_{\text{νερού}} \cdot V \cdot \Delta T - \gamma_{\text{γυαλιού}} \cdot V \cdot \Delta T \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= (\gamma_{\text{νερού}} - \gamma_{\text{γυαλιού}}) \cdot V \cdot \Delta T = (0,207 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 3,25 \cdot 10^{-6}) \cdot 1000 \cdot 20 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{V = 3,94 \text{ L}} \end{aligned}$$

ΘΔ4) Ο όγκος του δοχείου στον οποίο συγκεντρώνεται ο Hg ενός θερμομέτρου στους 0°C είναι V_0 και η διατομή του σωλήνα είναι A_0 . Ο γραμμικός συντελεστής διαστολής για το γυαλί είναι α_{γ} (το γυαλί είναι ισότροπο υλικό) και ο συντελεστής διαστολής όγκου του υδραργύρου είναι γ_{Hg} . Να υπολογίσετε το ύψος της στήλης του υδραργύρου στον τριχοειδή σωλήνα του θερμομέτρου όταν η θερμοκρασία γίνει $\theta^\circ\text{C}$ θεωρώντας ότι στη θερμοκρασία των 0°C ο Hg γεμίζει το δοχείο αλλά δεν έχει ανέβει ακόμα στον τριχοειδή σωλήνα. Θεωρείστε ότι διαστέλλετε μόνο το γυάλινο δοχείο που περιέχει τον Hg και όχι ο τριχοειδής σωλήνας.

ΛΥΣΗ:

Σύμφωνα με την εκφώνηση έχω τα δύο ακόλουθα σχήματα για το θερμόμετρο στους 0°C και στους $\theta^{\circ}\text{C}$.



Ο νέος όγκος του Hg (στο δοχείο και στον σωλήνα) θα είναι

$$\begin{aligned}V_{Hg} &= V_0(1 + \gamma_{Hg} \cdot \Delta T) \Rightarrow V_{Hg} = V_0[1 + \gamma_{Hg} \cdot (\theta - 0)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_{Hg} = V_0(1 + \gamma_{Hg} \cdot \theta)\end{aligned}$$

ενώ ο νέος όγκος του δοχείου (αφού υποθέτουμε ότι ο σωλήνας δεν διαστέλλεται) θα είναι:

$$\begin{aligned}V'_0 &= V_0(1 + \gamma_{\gamma\alpha\lambda\iota\omicron\upsilon} \cdot \Delta T) \Rightarrow V'_0 = V_0[1 + 3\alpha_{\gamma} \cdot (\theta - 0)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow V'_0 = V_0(1 + 3\alpha_{\gamma} \cdot \theta)\end{aligned}$$

Επομένως, η αύξηση όγκου που θα παρουσιαστεί στο θερμόμετρο θα είναι:

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_{Hg} - V'_0 = V_0(1 + \gamma_{Hg} \cdot \theta) - V_0(1 + 3\alpha_{\gamma} \cdot \theta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta V &= V_0(1 + \gamma_{Hg} \cdot \theta - 1 - 3\alpha_{\gamma} \cdot \theta) = V_0(\gamma_{Hg} \cdot \theta - 3\alpha_{\gamma} \cdot \theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta V = V_0(\gamma_{Hg} - 3\alpha_{\gamma}) \cdot \theta\end{aligned}$$

Καθώς όμως η αύξηση όγκου συνδέεται με την αλλαγή στο ύψος σύμφωνα με τη σχέση $\Delta V = A_0 \cdot \Delta h$ θα έχουμε ότι η άνοδος του υδραργύρου στο θερμοόμετρο θα είναι:

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{A_0} \xrightarrow{\Delta V = V_0(\gamma_{Hg} - 3\alpha_\gamma) \cdot \theta} \boxed{\Delta h = \frac{V_0(\gamma_{Hg} - 3\alpha_\gamma) \cdot \theta}{A_0}}$$

ΘΔ5) Μια γέφυρα αποτελείται από δύο κομμάτια κατασκευασμένα από ατσάλι, το καθένα μήκους 10 m στους 18°C, που ενώνονται μεταξύ τους με τη βοήθεια συνδέσμου που επιτρέπει τη διαστολή τους. Πιο πρέπει να είναι το κενό του συνδέσμου στη θερμοκρασία των 18°C ώστε η γέφυρα να μην παραμορφωθεί μια εξαιρετικά θερμή ημέρα που η θερμοκρασία θα φθάσει τους 45°C; Δεχθείτε ότι τα δύο τμήματα της γέφυρας διαστέλλονται μόνο στο σημείο που ενώνονται με τον σύνδεσμο.

Δίνεται ο συντελεστής γραμμικής διαστολής του ατσαλιού $\alpha = 13 \cdot 10^{-6} \text{ 1}/(\text{°C})$.

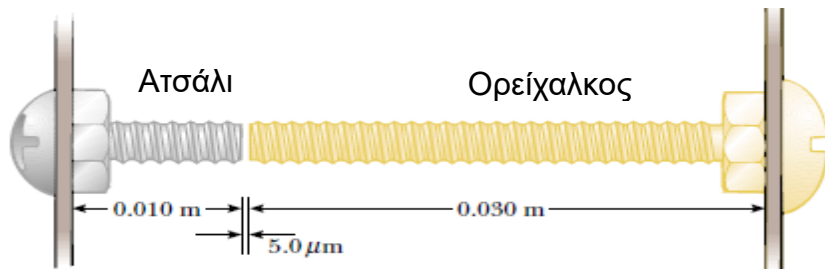
ΛΥΣΗ:

Επειδή τα δύο τμήματα της γέφυρας είναι πανομοιότυπα, αν το μήκος του ενός τμήματος αλλάζει κατά ΔL , το ίδιο θα συμβαίνει και με το μήκος του άλλου. Επομένως η συνολική αλλαγή μήκους, άρα και το ζητούμενο κενό θα είναι:

$$\Delta L_{\text{ολικό}} = 2 \cdot \Delta L = 2 \cdot \alpha_{\text{ατσάλιού}} \cdot L \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta L_{\text{ολικό}} = 2 \cdot 13 \cdot 10^{-6} \cdot (45 - 18) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta L_{\text{ολικό}} = 7,02 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 7,02 \text{ mm}}$$

ΘΔ6) Σε κάποια ηλεκτρική συσκευή δύο βίδες είναι τοποθετημένες έτσι ώστε να απέχουν πολύ μικρή απόσταση, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Με τη διέλευση ρεύματος οι βίδες θερμαίνονται. Αν η αρχική απόσταση μεταξύ των 5 μm μετρίεται στους 27°C, σε ποια θερμοκρασία οι βίδες θα ακουμπήσουν μεταξύ τους με κίνδυνο βραχυκυκλώματος; Δίνεται $\alpha_{\text{ατσάλιου}} = 11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ και $\alpha_{\text{ορείχαλκου}} = 19 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.



ΛΥΣΗ:

Αν υποθέσουμε ότι το μήκος της ατσάλινης βίδας αλλάζει κατά ΔL_1 και της βίδας από ορείχαλκο ΔL_2 τότε θα πρέπει το άθροισμά τους οριακά να είναι ίσο με 5 μm . Δηλαδή:

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = 5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow a_{\text{ατσάλιού}} \cdot L_1 \cdot \Delta T + a_{\text{ορείχαλκου}} \cdot L_2 \cdot \Delta T = 5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{\text{ατσάλιού}} \cdot L_1 + a_{\text{ορείχαλκου}} \cdot L_2) \cdot \Delta T = 5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{(a_{\text{ατσάλιού}} \cdot L_1 + a_{\text{ορείχαλκου}} \cdot L_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{(11 \cdot 10^{-6} \cdot 0,01 + 19 \cdot 10^{-6} \cdot 0,03)} \Rightarrow \Delta T = 7,4^\circ\text{C}$$

Αυτό σημαίνει ότι η θερμοκρασία μπορεί να φθάσει, χωρίς κίνδυνο βραχυκυκλώματος, στην τιμή $\theta = 27^\circ\text{C} + 7,4^\circ\text{C} = 34,4^\circ\text{C}$.

ΘΔ7*) α) Σε ένα άρθρο (T.P. Toepker, A disappearing rod, American Journal of Physics 55, 177-178 (1987)) προτείνεται το ακόλουθο πείραμα: Μια ράβδος, από ένα υλικό με γραμμικό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας ίσο με a , αρχικού μήκους L_0 , θερμαίνεται από θερμοκρασία T_0 , σε θερμοκρασία T_1 , οπότε το μήκος της γίνεται ίσο με L_1 . Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχοντας τη ράβδο με αρχικό μήκος ίσο με L_1 σε αρχική θερμοκρασία T_1 , την ψύχουμε ώστε να φθάσει στην αρχική θερμοκρασία T_0 . Χρησιμοποιώντας τη σχέση $L = L_0\{1 + a(T - T_0)\}$ δείξτε ότι η ράβδος μετά από αυτή την κυκλική μεταβολή δεν φθάνει στο αρχικό μήκος L_0 , αλλά σε μια νέα τιμή μήκους που είναι μικρότερη από την L_0 και ίση με $L'_0 = fL_0 = \{1 - [a(T_1 - T_0)]^2\}L_0$ γεγονός που σίγουρα είναι παράδοξο.¹ Εκτιμήστε την τιμή του πολλαπλασιαστικού παράγοντα f για τυπικές τιμές του συντελεστή γραμμικής διαστολής και μεταβολής της θερμοκρασίας $T_1 - T_0$. Τι παρατηρείτε; Εμφανίζει το ίδιο παράδοξο η ακριβής σχέση για τη διαστολή του μήκους $L = L_0 e^{a(T-T_0)}$;

β) Χρησιμοποιήστε ένα λογιστικό φύλλο (για παράδειγμα το Excel) για να δείξετε ότι ο ακριβής τύπος της γραμμικής θερμικής διαστολής $L = L_0 e^{a(T-T_0)}$ και ο προσεγγιστικός τύπος, $L = L_0\{1 + a(T - T_0)\}$, δίνουν παραπλήσια αποτελέσματα. Υπολογίστε το ποσοστό σφάλματος που έχετε με βάση τον προσεγγιστικό τύπο.

Χρησιμοποιήστε τις τιμές $a = 5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $L_0 = 1 \text{ m}$ και $T_0 = 273 \text{ K}$.

ΛΥΣΗ:

¹ Ο συγγραφέας της εργασίας προχώρησε στο συμπέρασμα ότι μετά από ένα πλήθος τέτοιων κύκλων το μήκος της ράβδου μπορεί να μειωθεί σε όποια τιμή θέλουμε και υπολόγισε το πλήθος των κύκλων που πρέπει να γίνουν για να υποδιπλασιαστεί το μήκος της ράβδου. Μπορείτε να το υπολογίσετε;

Για τη θέρμανση της ράβδου ισχύει ότι:

$$L_1 = L_0\{1 + a(T_1 - T_0)\} \Rightarrow L_1 = L_0\{1 + a\Delta T\}$$

όπου $\Delta T = T_1 - T_0$.

Για την επακόλουθη ψύξη της ράβδου θα έχουμε αντιστοίχως ότι:

$$L'_0 = L_1\{1 + a(T_0 - T_1)\} \Rightarrow L'_0 = L_1\{1 - a\Delta T\} \Rightarrow$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι έχουμε να κάνουμε με συστολή. Αντικαθιστώντας τώρα σε αυτή την τελευταία σχέση την σχέση $L_1 = L_0\{1 + a\Delta T\}$ έχουμε:

$$L'_0 = L_0\{1 + a\Delta T\}\{1 - a\Delta T\} \Rightarrow L'_0 = L_0\{1 - (a\Delta T)^2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L'_0 = \{1 - [a(T_1 - T_0)]^2\}L_0 = fL_0}$$

όπου $f = \{1 - [a(T_1 - T_0)]^2\}$.

ΘΔ8) Μια ράβδος ψευδαργύρου έχει μήκος 1,9 m στους 20°C. Ποιο θα είναι το μήκος της α) Μια ζεστή ημέρα στη Σαχάρα σε θερμοκρασία 48°C. β) Μια κρύα ημέρα στην Γροιλανδία σε θερμοκρασία -53°C.

Δίνεται $\alpha_{\text{ψευδαργύρου}} = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

ΘΔ9) α) Πως θα ορίζατε τον συντελεστή επιφανειακής διαστολής β ; Σε ποιες περιπτώσεις μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε επιφανειακή διαστολή ενός σώματος; Δώστε ένα παράδειγμα σώματος τη διαστολή του οποίου μπορούμε να μελετήσουμε με τον τρόπο αυτό.

β) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής επιφανειακής διαστολής συνδέεται με τον συντελεστή γραμμικής διαστολής, α , μέσω της σχέσης $\beta = 2\alpha$.

ΛΥΣΗ:

α) Κατ' αναλογία με τον συντελεστή γραμμικής και κυβικής διαστολής θα έχω:

$$\beta = \frac{1}{A} \frac{dA}{dT}$$

όπου A το εμβαδόν της επιφάνειας, dA η απειροστή μεταβολή του εμβαδού λόγω μιας απειροστής μεταβολής της θερμοκρασίας κατά dT . Ο συντελεστής β μας δείχνει το ποσοστό μεταβολής της επιφάνειας ανά μονάδα μεταβολής της θερμοκρασίας. Επιλύοντας τη σχέση αυτή μπορούμε να καταλήξουμε στον νόμο για την μεταβολή του εμβαδού που έχει τη μορφή

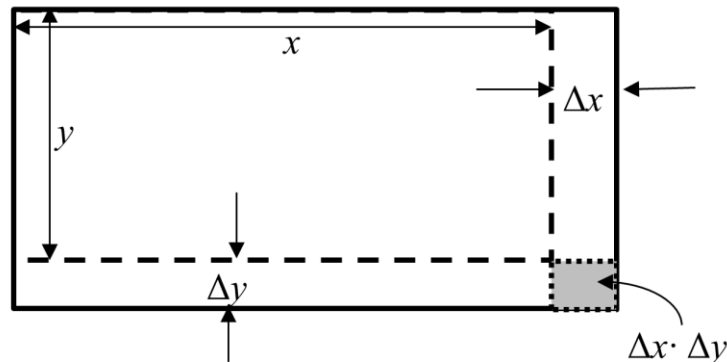
$$dA = \beta \cdot A \cdot dT$$

για απειροστές ποσότητες και εφόσον ο συντελεστής β έχει πολύ μικρές τιμές ο νόμος για πεπερασμένες μεταβολές θα έχει την ίδια μορφή, δηλαδή:

$$\Delta A = \beta \cdot A \cdot \Delta T \Rightarrow A' = A(1 + \beta \Delta T)$$

Η προσέγγιση της επιφανειακής διαστολής μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε σώματα στα οποία η μια από τις τρεις διαστάσεις είναι πολύ μικρότερη από τις άλλες δύο. Τέτοια σώματα είναι τα λεπτά φύλλα από οποιοδήποτε υλικό, για παράδειγμα μια λαμαρίνα ή ένα κομμάτι από αλουμινόχαρτο.

β) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε διαθέσιμη μια λαμαρίνα σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου με διαστάσεις x και y όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε πλευρά του διαστέλλεται σύμφωνα με το νόμο της γραμμικής διαστολής κατά

$$\Delta x = \alpha x \Delta T$$

$$\Delta y = \alpha y \Delta T$$

Αυτό σημαίνει ότι οι διαστάσεις του νέου ορθογώνιου θα είναι αντιστοίχως

$$x' = x(1 + \alpha \Delta T)$$

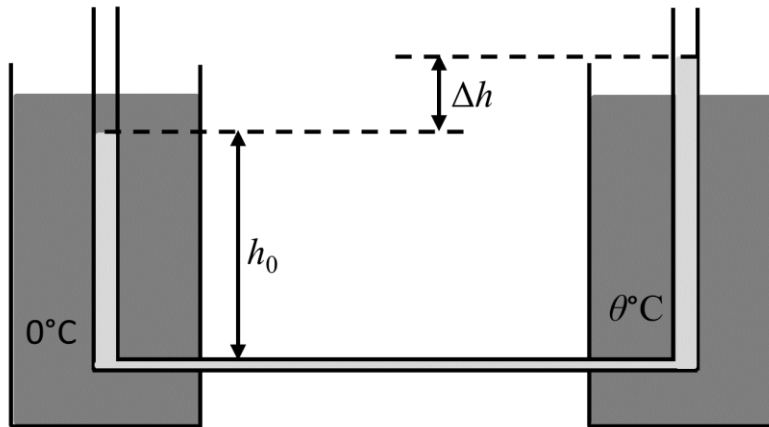
$$y' = y(1 + \alpha \Delta T)$$

Το εμβαδό λοιπόν της επιφάνειας του ορθογωνίου μετά τη διαστολή θα είναι:

$$A' = x'y' = x(1 + a\Delta T)y(1 + a\Delta T) = xy(1 + a\Delta T)^2 \xrightarrow{A=xy} \\ \Rightarrow A' = A(1 + a\Delta T)^2 = A[1 + 2a\Delta T + (a\Delta T)^2]$$

Καθώς όμως τώρα γνωρίζουμε ότι η τιμή του γραμμικού συντελεστή a είναι πολύ μικρή, μπορούμε να καταλάβουμε ότι $(a\Delta T)^2 \ll 2a\Delta T$, γεγονός που μας επιτρέπει να αγνοήσουμε τον όρο $(a\Delta T)^2$. Αυτό σημαίνει ότι ο νόμος της επιφανειακής διαστολής παίρνει τη μορφή $A' = A[1 + 2a\Delta T]$ που αν συγκριθεί με τη σχέση $A' = A(1 + \beta\Delta T)$ που προέκυψε στο προηγούμενο ερώτημα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει να ισχύει $\beta = 2a$.

ΘΔ10*) Σε ένα πείραμα που εκτέλεσαν για πρώτη φορά το 1816 οι Dulong και Petit χρησιμοποίησαν τη διάταξη του ακόλουθου σχήματος για να μετρήσουν το συντελεστή κυβικής διαστολής ενός υγρού.



Στη διάταξη αυτή δύο σωλήνες που περιέχουν κάποιο υγρό ενώνονται στη βάση τους με ένα τροχοειδή σωλήνα (σωλήνα αμελητέας διαμέτρου). Ο ένας από τους σωλήνες βρίσκεται σε θερμοκρασία 0°C , και στον σωλήνα αυτό το υγρό βρίσκεται σε ύψος h_0 , ενώ στον δεύτερο, που βρίσκεται σε θερμοκρασία $\theta^\circ\text{C}$, το υγρό φθάνει σε ύψος Δh πάνω από ελεύθερη επιφάνεια του πρώτου σωλήνα. Δείξτε ότι με τη βοήθεια της διάταξης αυτής μπορείτε να προσδιορίσετε τον συντελεστή κυβικής διαστολής του υγρού. Έχει κάποιο ρόλο ο συντελεστής διαστολής του υλικού των δύο σωλήνων;

Εφαρμογή: Υπολογίστε τον συντελεστή γ αν είναι $\theta = 16^\circ\text{C}$, $h_0 = 126\text{ cm}$ και $\Delta h = 1,50\text{ m}$.

ΛΥΣΗ:

Για να ισορροπεί το ρευστό θα πρέπει οι πιέσεις στους πυθμένες των δύο σωλήνων να είναι ίσες, δηλαδή:

$$p_{\text{πυθμένα 1}} = p_{\text{πυθμένα 2}} \Rightarrow \rho_{0^\circ\text{C}} \cdot g \cdot h_0 + p_{\text{atm}} = \rho_\theta \cdot g \cdot (h_0 + \Delta h) + p_{\text{atm}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{0^\circ\text{C}} \cdot g \cdot h_0 = \rho_\theta \cdot g \cdot (h_0 + \Delta h) \Rightarrow \rho_{0^\circ\text{C}} \cdot h_0 = \rho_\theta \cdot (h_0 + \Delta h) \xrightarrow{\rho_\theta = \frac{m}{V_\theta}}$$

$$\xrightarrow{\rho_{0^\circ\text{C}} = \frac{m}{V_{0^\circ\text{C}}}} \frac{m}{V_{0^\circ\text{C}}} \cdot h_0 = \frac{m}{V_\theta} \cdot (h_0 + \Delta h) \Rightarrow \frac{h_0}{V_{0^\circ\text{C}}} = \frac{h_0 + \Delta h}{V_\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_\theta h_0 = V_{0^\circ\text{C}} (h_0 + \Delta h) \xrightarrow{V_\theta = V_{0^\circ\text{C}} [1 + \gamma(\theta - 0)]}$$

$$\Rightarrow V_{0^\circ\text{C}} (1 + \gamma\theta) h_0 = V_{0^\circ\text{C}} (h_0 + \Delta h) \Rightarrow (1 + \gamma\theta) h_0 = h_0 + \Delta h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \gamma\theta = \frac{h_0 + \Delta h}{h_0} \Rightarrow \gamma\theta = \frac{h_0 + \Delta h}{h_0} - 1 \Rightarrow \gamma\theta = \frac{h_0 + \Delta h - h_0}{h_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\Delta h}{\theta \cdot h_0}}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές που δίνονται στο παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει η ζητούμενη τιμή του συντελεστή κυβικής διαστολής.

ΘΔ11) Δείξτε ότι η μεταβολή $\Delta\rho$ που υφίσταται η πυκνότητα ενός στερεού ή ενός υγρού, αρχικής πυκνότητας ρ , όταν η θερμοκρασία του αυξηθεί κατά ΔT υπολογίζεται από τη σχέση $\Delta\rho = -\gamma\rho\Delta T$, όπου γ ο συντελεστής κυβικής διαστολής του υλικού. Εξηγήστε τη σημασία του αρνητικού πρόσημου στον προηγούμενο τύπο.

ΛΥΣΗ:

Αφού ο όγκος εξαρτάται από τη θερμοκρασία, ενώ η μάζα δεν εξαρτάται, κάθε φορά που αλλάζει η θερμοκρασία θα αλλάζει και η πυκνότητα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι όταν η θερμοκρασία είναι ίση με T , τότε ο όγκος είναι ίσος με V και η πυκνότητα ίση με ρ . Όταν τώρα η θερμοκρασία γίνει ίση με T' , τότε ο όγκος είναι ίσος με V' και η πυκνότητα ίση με ρ' . Για τη μεταβολή τώρα της πυκνότητας θα έχω:

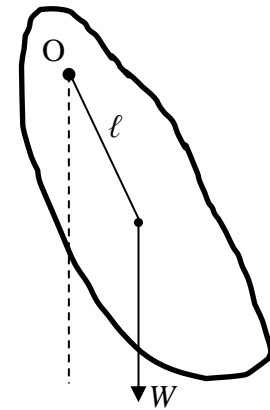
$$\Delta\rho = \rho' - \rho = \frac{m}{V'} - \frac{m}{V} = m \left(\frac{1}{V'} - \frac{1}{V} \right) = m \frac{V - V'}{VV'}$$

Σε αυτή την τελευταία σχέση έχουμε ότι $V - V' = -\Delta V = -\gamma V \Delta T$, ενώ επιπλέον μπορώ να υποθέσω ότι $V \approx V'$, οπότε $VV' = V^2$. Με τον τρόπο αυτό η σχέση για την μεταβολή της πυκνότητας παίρνει τη μορφή:

$$\Delta \rho = m \frac{-\gamma V \Delta T}{V^2} \Rightarrow \Delta \rho = -\frac{\gamma m \Delta T}{V} \Rightarrow \boxed{\Delta \rho = -\gamma \rho \Delta T}$$

Το αρνητικό πρόσημο τώρα που υπάρχει στη σχέση που μόλις αποδείξαμε μας δείχνει ότι αύξηση της θερμοκρασίας ($\Delta T > 0$) οδηγεί σε μείωση της πυκνότητας.

ΘΔ12) (α) Δείξτε ότι η μεταβολή ΔI που υφίσταται η ροπή αδράνειας (I) ενός στερεού όταν η θερμοκρασία του αυξηθεί κατά ΔT υπολογίζεται από τη σχέση $\Delta I = 2aI\Delta T$, όπου a ο συντελεστής γραμμικής διαστολής του στερεού. (β) Η περίοδος του φυσικού εκκρεμούς που φαίνεται στο δίνεται από τη σχέση $t = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell}}$, όπου I η ροπή αδράνειας και ℓ η απόσταση του κέντρου μάζας από το σημείο ανάρτησης O . Δείξτε ότι η μεταβολή Δt που υφίσταται η περίοδος (t) όταν η θερμοκρασία του αυξηθεί κατά ΔT υπολογίζεται από τη σχέση $\Delta t = \frac{1}{2}at\Delta T$, όπου a ο συντελεστής γραμμικής διαστολής του υλικού.



ΛΥΣΗ:

(α) Για τη ροπή αδράνειας γνωρίζουμε ότι γενικά δίνεται από μια σχέση της μορφής $I = \lambda m r^2$, όπου r κάποια χαρακτηριστική γραμμική διάσταση του στερεού. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι όταν η θερμοκρασία είναι ίση με T , τότε η χαρακτηριστική γραμμική διάσταση είναι ίση με r και η ροπή αδράνειας ίση με I . Όταν τώρα η θερμοκρασία γίνει ίση με T' , τότε η χαρακτηριστική γραμμική διάσταση θα γίνει ίση με r' και η ροπή αδράνειας ίση με I' . Για τη μεταβολή τώρα λοιπόν της ροπής αδράνειας θα έχω:

$$\Delta I = I' - I = \lambda m r'^2 - \lambda m r^2 = \lambda m (r'^2 - r^2) = \lambda m (r' - r)(r' + r)$$

Σε αυτή την τελευταία σχέση έχουμε ότι $r' - r = \Delta r = a r \Delta T$, ενώ επιπλέον μπορώ να υποθέσω ότι $r \approx r'$, οπότε $r r' \approx 2r$. Με τον τρόπο αυτό η σχέση για την μεταβολή της ροπής αδράνειας παίρνει τη μορφή

$$\Delta I = \lambda m a r \Delta T 2r \Rightarrow \Delta I = 2a \lambda m r^2 \Delta T \xrightarrow{I = \lambda m r^2} \boxed{\Delta I = 2a I \Delta T}$$

(β) Παρατηρώ ότι η περίοδος του φυσικού εκκρεμούς εξαρτάται από την ροπή αδράνειας καθώς και από την απόσταση ℓ , με τις δύο αυτές παραμέτρους να αλλάζουν με τη

θερμοκρασία. Καθώς οι αλλαγές θα είναι μικρές, μπορώ να χρησιμοποιήσω το ολικό διαφορικό της περιόδου, θεωρώντας ότι έχω μια συνάρτηση $t = f(I, \ell)$. Θα έχω λοιπόν:

$$dt = \left(\frac{\partial t}{\partial I}\right) dI + \left(\frac{\partial t}{\partial \ell}\right) d\ell$$

Είναι όμως:

$$\frac{\partial t}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \left(2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{mg\ell}} \frac{\partial}{\partial I} (I^{1/2}) = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\sqrt{mg\ell}} \frac{1}{\sqrt{I}}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \ell} = \frac{\partial}{\partial \ell} \left(2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell}} \right) = \frac{2\pi\sqrt{I}}{\sqrt{mg}} \frac{\partial}{\partial \ell} (\ell^{-1/2}) = -\frac{1}{2} \frac{2\pi\sqrt{I}}{\sqrt{mg}} \frac{1}{\ell^{3/2}}$$

οπότε η σχέση που δίνει το ολικό διαφορικό της περιόδου θα είναι:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\sqrt{mg\ell}} \frac{1}{\sqrt{I}} dI - \frac{1}{2} \frac{2\pi\sqrt{I}}{\sqrt{mg}} \frac{1}{\ell^{3/2}} d\ell \xrightarrow{dI=2a\ell dT} \\ \xrightarrow{d\ell=\alpha\ell dT} dt &= \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\sqrt{mg\ell}} \frac{1}{\sqrt{I}} 2a\ell dT - \frac{1}{2} \frac{2\pi\sqrt{I}}{\sqrt{mg}} \frac{1}{\ell^{3/2}} \alpha\ell dT \Rightarrow \\ \Rightarrow dt &= a2\pi \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{mg\ell}} dT - \frac{1}{2} a2\pi \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{mg\ell}} dT \xrightarrow{t=2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}}} \\ \Rightarrow dt &= atdT - \frac{1}{2} atdT \Rightarrow dt = \frac{1}{2} atdT \end{aligned}$$

Θεωρώντας τώρα ότι οι διαφορές που θέλω να προσδιορίσω είναι τόσο μικρές ώστε να προσεγγίζουν τις τιμές των διαφορικών θα έχω τελικά ότι:

$$\Delta t = \frac{1}{2} at\Delta T$$