# Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

# Κεφάλαιο #6 (2020-21)

## ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a,b)$. Θα λέμε ότι η **f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x_0}$** όταν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ το οποίο το συμβολίζουμε με $f'(x_0)$ και το λέμε παράγωγο της $f$ στο $x_0$.

Αντί του $f'(x_0)$ χρησιμοποιούνται συχνά και οι συμβολισμοί $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$ και $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Μια συνάρτηση λέγεται **παραγωγίσιμη** αν υπάρχει η παράγωγός της για κάθε $x_0 \in (a,b)$. Σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$.

Μπορούμε, με βάση πάντα τον παραπάνω ορισμό, να εξετάσουμε αν η $f'$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν είναι, τότε λέμε ότι η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και συμβολίζουμε την δεύτερη παράγωγό της με $f''$

ΠΡΟΤΑΣΗ Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι συνεχής.

ΠΡΟΤΑΣΗ (παράγωγοι συνήθων συναρτήσεων)

$f(x) = c, c$ σταθερά, $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = 0$.

$f(x) = x^n, n = 1, 2, \ldots,$ $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = nx^{n-1}$.

$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R},$ $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = ax^{a-1}$.

$f(x) = e^x,$ $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = e^x$.

$f(x) = \log x,$ $x > 0$ τότε $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f(x) = \sin x,$ $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = \cos x$.

$f(x) = \cos x,$ $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = -\sin x$.

$f(x) = \tan x,$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

**Ιδιότητες:** Αν οι συναρτήσεις $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες τότε είναι παραγωγίσιμες και οι συναρτήσεις

(1) άθροισμα $f(x) + g(x)$ και ισχύει $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

(2) διαφορά $f(x) - g(x)$ και ισχύει $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

(3) γινόμενο $f(x) \cdot g(x)$ και ισχύει $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) πηλίκο $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ και ισχύει $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(5) σύνθεση (όταν ορίζεται) $g(f(x))$ και ισχύει $[g(f(x))]' = g'(f(x))\, f'(x)$

**Παραδείγματα εφαρμογής των ιδιοτήτων:**

- $(\sqrt{x} + \sin x)' \overset{\text{Ιδ.(1)}}{=} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + (\sin x)' = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}-1}\right) + \cos x = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x.$
  Η παράγωγος συνάρτηση $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x$ είναι και αυτή παραγωγίσιμη άρα η αρχική $\sqrt{x} + \sin x$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η δεύτερη παράγωγός της είναι:
  $$(\sqrt{x} + \sin x)'' = \left((\sqrt{x} + \sin x)'\right)' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + (\cos x)'$$
  $$= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \sin x = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \sin x.$$
- $\left(\frac{\tan x - 1}{\cos x}\right)' \overset{\text{Ιδ.(4)}}{=} \frac{(\tan x-1)'\cos x-(\tan x-1)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cos x-(\tan x-1)(-\sin x)}{\cos^2 x}.$
- $(e^{\sin x})' \equiv \dfrac{d\left(e^{\sin x}\right)}{dx} \overset{\text{Ιδ.(5)}}{=} \dfrac{d\left(e^{\sin x}\right)}{d(\sin x)}\dfrac{d(\sin x)}{dx} = e^{\sin x}\,(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x.$
- $\left(\log\sqrt{x^2+1}\right)' \overset{\text{Ιδ.(5)}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{x^2+1}.$

Κανονας L'Hopital Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $x_0 \in X$. Αν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

τότε $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, εφ΄ όσον το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει.

Σημείωση: Ο κανόνας ισχύει και όταν το πεδίο ορισμού των $f, g$ περιέχει διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ (αντίστ. $(-\infty, a)$) και $x \to +\infty$ (αντίστ. $x \to -\infty$).

**Παράδειγμα 1:** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (βλ. Πρόταση σελ. 5, ΚΕΦ.5)
Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0}(\sin x) = \lim_{x\to 0}(x) = 0$ οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

**Παράδειγμα 2:** Για το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = \lim_{x\to 0}(x) = 0$$

οπότε
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{0+\sin x}{1}=\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

**Παράδειγμα 3:** Μπορεί να απαιτηθεί η εφαρμογή του κανόνα L'Hopital περισσότερες από μία φορές: για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$ παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to+\infty}e^x=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ οπότε
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

**Παράδειγμα 4:** Σε κάποιες περιπτώσεις χρειάζεται να "δημιουργήσουμε" πηλίκο συναρτήσεων προκειμένου να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hopital:
$$\lim_{x\to 0}(x\log x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x\in(a.b)$ ισχύει

$f'(x)>0$ τότε $f$ γνησίως αύξουσα στο $(a.b)$

$f'(x)\geq 0$ τότε $f$ αύξουσα στο $(a.b)$

$f'(x)<0$ τότε $f$ γνησίως φθίνουσα στο $(a.b)$

$f'(x)\leq 0$ τότε $f$ φθίνουσα στο $(a.b)$

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0\in(a.b)$ τότε $f'(x_0)=0$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: η συνάρτηση $f(x)=x^3$ δεν έχει τοπικό ακρότατο στο 0 αλλά η παράγωγός της $f'(x)=3x^2$ μηδενίζεται στο 0.
Αν η παράγωγος συνάρτηση $f'$ είναι παραγωγίσιμη τότε λέμε ότι η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και την $(f')'$ την συμβολίζουμε με $f''$ και την λέμε δεύτερη παράγωγο της $f$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x_0\in(a.b)$.

(1) αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)>0$ τότε $f$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0$.

(2) αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0$ τότε $f$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0$.

**Παράδειγμα 5:** Η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2+2$ έχει παράγωγο $f'(x)=2(x-1)$ που μηδενίζεται στο σημείο 1 και $f''(1)=2>0$ συνεπώς παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x=1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(a, b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Πρόταση Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και 1-1 συνάρτηση με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a.b)$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

όπου $y = f(x)$.

**Παράδειγμα 6:** Η συνάρτηση της εφαπτομένης $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Επίσης,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Από την προηγούμενη Πρόταση έπεται ότι παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι η συνάρτηση $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, διότι από τον τύπο έχουμε, για $y = \tan x$,

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

**Εφαρμογή 7:** Να δειχθεί ότι $e^x \geq 1 + x, x \in \mathbb{R}$.
Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$ η οποία έχει παραγώγους

$$f'(x) = e^x - 1 \quad \text{και} \quad f''(x) = e^x.$$

Στο σημείο 0 έχουμε $f'(0) = 0$ και $f''(0) = 1 > 0$, άρα από το Θεώρημα η $f$ έχει τοπικό ελάχιστο στο 0, δηλαδή, $0 = f(0) \leq f(x)$ για όλα τα σημεία $x$ σε ένα διάστημα $(a, b) \ni 0$. Όμως, η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ διότι η παράγωγός της $f'(x) = e^x - 1 < 0$ για $x \in (-\infty, 0)$. Παρομοίως, η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ διότι η παράγωγός της $f'(x) = e^x - 1 > 0$ για $x \in (0, +\infty)$. Άρα η $f$ έχει ολικό ελάχιστο στο 0, δηλαδή, $f(0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από όπου προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα

$$0 = f(0) \leq f(x) = e^x - x - 1 \Longrightarrow e^x \geq 1 + x.$$

# Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$. [Απ: 0]

2. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x)$. [Απ: $+\infty$]

   Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1 και το ότι $e^x - x = e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)$.

3. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά ή ολικά) και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. [Απ: $-1$ τοπ. ελ.,1 τοπ. μεγ.]

4. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά ή ολικά) και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = e^x - 2x$. [Απ: $\log 2$ ολικό ελάχιστο]

5. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά ή ολικά) και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = x^2 \log x$. [Απ: $1/\sqrt{e}$ ολικό ελάχιστο]

6. Να δείξετε ότι $\log(x+1) - \log x < 1/x, x > 0$.

   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Εφαρμογής 6 και το ότι η $e^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

7. Δείξετε ότι $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}, x > 0$.

   Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$ και δείξτε ότι $g'(x) > 0$ χρησιμοποιώντας την Εφαρμογή 7.

8. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανίσωση $e^x > 1 - x$? [Απ: $x > 0$]

   Υπόδειξη: Θεωρήστε την $f(x) = e^x + x$.

9. Να δείξετε ότι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x) = e^{1-3x}$ και $f_2(x) = 2x - 5$ τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο.

   Υπόδειξη: Θεωρήστε την $h(x) = e^{1-3x} - 2x + 5$ και δείξτε ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Στην συνέχεια χρησιμοποιήστε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty.$$