

Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

Κεφάλαιο #2 (2021-22)

ΟΡΙΣΜΟΣ $m \times n$ ΠΙΝΑΚΑ

Ένας $m \times n$ πίνακας A είναι μια παράθεση πραγματικών αριθμών σε γραμμές και στήλες ως ακολούθως:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Λέμε ότι ο πίνακας A έχει m γραμμές και n στήλες και το στοιχείο του πίνακα A που βρίσκεται στην ij -θέση, δηλαδή, στην i -γραμμή και j -στήλη, το συμβολίζουμε με a_{ij} . Ως εκ τούτου, συχνά γράφουμε τον πίνακα A ως

$$A \stackrel{\text{συμβ.}}{\equiv} (a_{ij})$$

όπου $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(m, n)$ το σύνολο των πινάκων με m γραμμές και n στήλες.

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ένας 2×3 πίνακας και ο πίνακας $B =$

$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ένας 3×2 πίνακας.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΙΝΑΚΩΝ

(α) Πρόσθεση

Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ δύο $m \times n$ πίνακες,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε το άθροισμά τους $A + B := C$ να είναι ο πίνακας $C = (c_{ij})$ όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ για όλα τα ij , δηλαδή

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

(β) Πολλαπλασιασμός

Έστω $A \in \mathcal{M}(m, n)$ και $B \in \mathcal{M}(l, k)$. Το γινόμενο AB ορίζεται αν και μόνο αν $n = l$, δηλαδή, αν ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα A ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα B . Ο πίνακας γινόμενο AB έχει m γραμμές και k στήλες, δηλαδή, $AB \in \mathcal{M}(m, k)$.

Παραδείγματα:

$$(i) \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}.$$

Σημειώτεον ότι ο πρώτος πίνακας είναι 1×2 πίνακας, ο δεύτερος είναι 2×3 και το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι ένας 1×3 πίνακας.

Το γινόμενο $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ δεν ορίζεται διότι ο πρώτος πίνακας έχει 3 στήλες και ο δεύτερος 1 γραμμή.

$$(ii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-4) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) & 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ένας πίνακας A λέγεται *τετραγωνικός* αν ο αριθμός των γραμμών του ισούται με τον αριθμό των στηλών του.

Το αποτέλεσμα του γινομένου στο παράδειγμα (ii) παραπάνω είναι ένας τετραγωνικός 2×2 πίνακας.

Οι τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες συμβολίζονται με $\mathcal{M}(n)$. Ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας που έχει την μονάδα 1 σε κάθε θέση της κυρίας διαγωνίου και 0 σε κάθε άλλη θέση ονομάζεται *ταυτοτικός* και συμβολίζεται με I_n . Για παράδειγμα, ο παρακάτω πίνακας είναι ο ταυτοτικός 5×5 πίνακας.

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Γενικά, $I_n = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ όπου $a_{ii} = 1$ και $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$.

Παρατήρηση: Αν $A \in \mathcal{M}(n)$, τότε ισχύει $AI_n = I_nA = A$, γεγονός που δικαιολογεί την ορολογία «ταυτοτικός» για τον I_n .

Ορισμός. Ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathcal{M}(n)$, είναι ένας τετραγωνικός πίνακας ίδιας διάστασης, συμβολισμός $A^{-1} \in \mathcal{M}(n)$, έτσι ώστε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Εάν ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε ο A λέγεται **αντιστρέψιμος**. Σημειωτέον ότι δεν έχουν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντίστροφο αλλά όταν ο αντίστροφος υπάρχει είναι ένας και μοναδικός. Στην συνέχεια θα διατυπώσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη του αντιστρόφου ενός πίνακα.

Ιδιότητες τετραγωνικών πινάκων. Έστω $A, B, C \in \mathcal{M}(n)$. Για $A = (a_{ij})$ συμβολίζουμε με λA τον πίνακα που στην ij -θέση έχει το στοιχείο λa_{ij} .

$$\begin{aligned} (1) \quad A + B &= B + A & (2) \quad A + (B + C) &= (A + B) + C \\ (3) \quad A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C & (4) \quad A \cdot (\lambda B) &= \lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B. \end{aligned}$$

Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, δηλαδή, εν γένει $AB \neq BA$. Για παράδειγμα, για τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

έχουμε

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot (-8) + 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + 8 \cdot (-1) & 2 \cdot (-8) + 8 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + (-8) \cdot 2 & 4 \cdot 4 + (-8) \cdot 8 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 & (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -48 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

4. ΤΑΞΗ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω $A \in \mathcal{M}(m, n)$ ένας $m \times n$ πίνακας. Θεωρούμε κάθε γραμμή του A ως διάνυσμα του \mathbb{R}^n . Η **τάξη** του πίνακα A είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A .

Προφανώς, αν A είναι ένας μη μηδενικός πίνακας διάστασης $m \times n$ τότε η τάξη του είναι ένας φυσικός αριθμός ≥ 1 και $\leq m$.

Παραδείγματα:

Η τάξη του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι 2 αφού τα διανύσματα $u_1 = (1, 2, 1)$ και $u_2 = (0, 3, 1)$ που καθορίζονται από τις γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον \mathbb{R}^3 .

Η τάξη του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι 2 αφού τα διανύσματα $u_1 = (1, 2, 1)$ και $u_2 = (2, 4, 2)$ που καθορίζονται από τις γραμμές του είναι γραμμικά εξαρτημένα στον \mathbb{R}^3 ($u_2 = 2u_1$). Άρα η τάξη του είναι 1.

Η τάξη του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ δεν μπορεί να ισούται με 3 αφού ξέρουμε, από το Θεώρημα του προηγούμενου κεφαλαίου, ότι δεν υπάρχουν 3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον \mathbb{R}^2 . Εξετάζουμε αν δύο από τα διανύσματα $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (3, 3)$ και $u_3 = (0, 2)$ που καθορίζονται από τις γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα, όμως, τα $u_1 = (1, 1)$, $u_3 = (0, 2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2.

Η διαδικασία ελέγχου που κάναμε στα παραπάνω παραδείγματα είναι πρακτικά ανέφικτη όταν η διάσταση του εξεταζόμενου πίνακα είναι μεγάλη. Γι' αυτό θα περιγράψουμε στην συνέχεια έναν αλγόριθμο εύρεσης της τάξης ενός πίνακα που μπορεί να εφαρμοστεί και σε πίνακες μεγάλης διάστασης.

(α) Κλιμακωτοί Πίνακες

Ένας πίνακας A λέγεται **κλιμακωτός** αν ισχύουν τα εξής:

- (i) Το στοιχείο a_{11} του A στην 1η γραμμή και πρώτη στήλη είναι διάφορο του μηδενός ($a_{11} \neq 0$).
- (ii) Το 1^ο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιάτερα από το

1^ο μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής. Συμβολικά,

$$\left. \begin{array}{l} a_{i_0 j_0} \neq 0 \quad \text{και} \\ a_{i_0 j} = 0, \quad \forall j < j_0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{(i_0-1)j'} \neq 0 \text{ για κάποιο } j' < j_0.$$

(iii) Οι μηδενικές γραμμές βρίσκονται στο τέλος του πίνακα.

Παραδείγματα:

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός.

Το στοιχείο 8 στην 32-θέση του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν ικανοποιεί την συνθήκη (ii) παραπάνω, άρα ο πίνακας δεν είναι κλιμακωτός.

Παρομοίως οι πίνακες $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ δεν είναι κλιμακωτοί.

Πρόταση: Η τάξη ενός κλιμακωτού πίνακα ισούται με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών του.

Για παράδειγμα, η τάξη του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ είναι 3 και η τάξη του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι 2.

(β) Μετατροπή πίνακα σε κλιμακωτό

Υπάρχει μία καλά ορισμένη επαναληπτική διαδικασία (μέθοδος απαλοιφής Gauss) η οποία μετατρέπει κάθε πίνακα A σε κλιμακωτό. Η μέθοδος αυτή έχει μεγάλη πρακτική αξία για την εύρεση της τάξης τυχαίου πίνακα λόγω της παραπάνω Πρότασης και του γεγονότος ότι

- πολλαπλασιάζοντας μια γραμμή με ένα μη-μηδενικό αριθμό,
- προσθέτοντας μια γραμμή σε μια άλλη γραμμή και
- εναλλάσσοντας την θέση δύο γραμμών (ή στηλών),

η τάξη του πίνακα που προκύπτει δεν αλλάζει.

Εφαρμόζοντας πράξεις μεταξύ γραμμών των τριών παραπάνω τύπων, ο τυχαίος πίνακας μετατρέπεται σε κλιμακωτό και, από την παραπάνω Πρόταση, η τάξη του προκύπτει άμεσα.

Παράδειγμα: Ο συμβολισμός $\xrightarrow{\lambda r_i + r_j}$ σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε την i -γραμμή με λ και την προσθέτουμε στην j -γραμμή.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-\frac{2}{3}r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Η πρώτη πράξη μηδενίζει τον αριθμό 2 στην 21-θέση και η δεύτερη τον αριθμό 3 στην 31-θέση. Η τρίτη πράξη μηδενίζει το -2 στην 32-θέση.

$$\begin{aligned} \text{Παράδειγμα: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_3} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-r_2+r_4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ 2×2 ΚΑΙ 3×3 .

Η ορίζουσα $\det(A)$ του τετραγωνικού 2×2 πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ισούται εξ ορισμού με $\det(A) := ad - bc$. Ένας άλλος συνηθισμένος συμβολισμός για την ορίζουσα του πίνακα A είναι ο εξής:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \stackrel{\text{συμβ.}}{\equiv} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Η ορίζουσα $\det(A)$ του τετραγωνικού 3×3 πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ισούται με

$$\det(A) := a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα υπολογίζεται και από την παρακάτω παράσταση:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε την ορίζουσα ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα για κάθε φυσικό n .

Γεωμετρική Σημασία ορίζουσας. Έστω τα διανύσματα $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$ στο επίπεδο \mathbb{R}^2 . Το εμβαδόν E του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα u, v ισούται με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Δηλαδή $E = |\det(A)|$.

Έστω τα διανύσματα $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3)$ και $w = (z_1, z_2, z_3)$ στον Ευκλείδιο χώρο \mathbb{R}^3 . Ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα u, v, w ισούται με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του 3×3 πίνακα $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$. Δηλαδή $V = |\det(A)|$.

Πρόταση: Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας. Αν $\det(A) \neq 0$ τότε υπάρχει ο αντίστροφος A^{-1} του A και ισούται με

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\det(A)} & \frac{-b}{\det(A)} \\ \frac{-c}{\det(A)} & \frac{a}{\det(A)} \end{pmatrix}.$$

Πρόταση: Έστω $A, B \in \mathcal{M}(n)$ τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες. Τότε ισχύει

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Ιδιότητες Οριζουσών: 1) Αν σε μια γραμμή (αντ. στήλη) προσθέσουμε μια άλλη γραμμή, διατηρώντας όλες τις άλλες γραμμές (αντ. στήλες) αμετάβλητες, η ορίζουσα παραμένει η ίδια.

2) Ένας πίνακας με δύο ίδιες γραμμές (αντ. στήλες) έχει ορίζουσα ίση με μηδέν.

3) Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή (αντ. στήλη) με ένα πραγματικό αριθμό λ τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ .

Θεώρημα: Έστω $A \in \mathcal{M}(n)$ τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή, υπάρχει ο A^{-1} .
- $\det(A) \neq 0$.
- Η τάξη του πίνακα A ισούται με n .

Ασκήσεις

1. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Να εξετάσετε ποια από τα γινόμενα $AA, AB, BA, BB, BC, CB, CC, AC, CA$ υπάρχουν και, όποια υπάρχουν, να τα υπολογίσετε.

2. Να βρείτε την τάξη καθενός από τους παρακάτω πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \left[\text{Απ: } 3, 3, 3 \right]$$

3. Είναι δυνατόν ένας 2×3 πίνακας να έχει τάξη 3?

Υπόδειξη: ποιος ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων στο \mathbb{R}^2 ?

4. Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, υπάρχει πίνακας X (κατάλληλης διά-

στασης) έτσι ώστε $XA = B$?

[Υπόδειξη: $\det A = 1 \neq 0$ άρα υπάρχει ο A^{-1} .]

5. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, υπάρχει πίνακας X (κατάλληλης διάστασης) έτσι ώστε $AX = B$?

Υπόδειξη: $\det A = 0, \det B \neq 0$ άρα, αν υπήρχε τέτοιος πίνακας X

$$0 = \det(A) \det(X) = \det(AX) = \det(B) \neq 0.$$

Εναλλακτικά, διαπιστώστε ότι το σύστημα που προκύπτει από την εξίσωση πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

δεν έχει λύση.

6. Όμοια με την Άσκηση 5 με τον πίνακα B να είναι $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη: Η αντίστοιχη εξίσωση $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$ δίνει

το σύστημα $\begin{cases} z + 2z = 4 \\ y + 2w = 1 \end{cases}$ που έχει άπειρες λύσεις, φερ' ειπείν,

$$x = 4, y = 1, z = w = 0 \implies X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$