ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΣ - ΣΗΜΑΝΣΗ – ΕΛΕΥΘΕΡΩΣΗ – ΕΠΑΝΑΣΥΛΛΗΨΗ ΤΩΝ ΖΩΩΝ

ΑΜΕΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ:

n_1=Σύλληψη - Σήμανση

n_2=Επανασύλληψη

m_2= Σημαδεμένα

- ✓Με επανατοποθέτηση:
- ✓Χωρίς επανατοποθέτηση:

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ:

$$\frac{n_1}{N} = \frac{m_2}{n_2}$$

Προκαθορισμένα Σταθερά

- ✓Με επανατοποθέτηση:
- ✓Χωρίς επανατοποθέτηση:

ΑΡΧΕΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

1. Όλα τα άτομα έχουν την ίδια πιθανότητα να συλληφθούν στην πρώτη δειγματοληψία
2. Η σήμανση δεν χάνεται ούτε εξαλείφεται
3. Η σύλληψη και η σήμανση δεν επηρεάζει την επανασύλληψη
4. Και το δεύτερο δείγμα είναι τυχαίο
5. Όλα τα άτομα που επανα-συλλαμβάνονται αναφέρονται στη μελέτη
6. Ο πληθυσμός είναι κλειστός

ΑΜΕΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

✓*Με επανατοποθέτηση*

(Το m ακολουθεί διωνυμική κατανομή)

n_1=Σύλληψη - Σήμανση

n_2=Επανασύλληψη

m_2= Σημαδεμένα

$$\frac{n_1}{N} = \frac{m_2}{n_2}$$

$$\underset{\text{(Lincoln)}}{\text{Petersen}} : \hat{N} = \frac{n_1 n_2}{m_2}$$ *(Μερολήπτική)*

$$\text{Bailey} : \hat{N} = \frac{n_1(n_2+1)}{(m_2+1)}$$ *(Αμερόληπτη)*

Διακύμανση: $$\boxed{\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{n_1^2(n_2+1)(n_2-m_2)}{(m_2+1)^2(m_2+2)}}$$

Συντελεστής Παραλλακτικότητας: $$\boxed{C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{m_2}}}$$

ΑΜΕΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΠΛΗΘΥΣΜΟ

✓*Με επανατοποθέτηση*

$n_1 = 50$

$n_2 = 210$

$m_2 = 8$

$$\text{Bailey}: \hat{N} = \frac{n_1(n_2+1)}{(m_2+1)} = \frac{50(210+1)}{(8+1)} = \mathbf{1172}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{50^2(210+1)(210-8)}{(8+1)^2(8+2)} = \mathbf{131549}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \mathbf{0.35}$$

ΑΜΕΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΠΛΗΘΥΣΜΟ

✓*Με επανατοποθέτηση*

$n_1 = 700$

$n_2 = 200$

$m_2 = 50$

$$\text{Bailey}: \hat{N} = \frac{n_1(n_2+1)}{(m_2+1)} = \frac{700*(200+1)}{(50+1)} = \mathbf{2759}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{n_1^2(n_2+1)(n_2-m_2)}{(m_2+1)^2(m_2+2)}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{700^2*(200+1)(200-50)}{(50+1)^2(50+2)} = \mathbf{109229}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{m_2}}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \mathbf{0.14}$$

ΑΜΕΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΠΛΗΘΥΣΜΟ

✓*Με επανατοποθέτηση*

$n_1 = 700$

$n_2 = 700$

$m_2 = 50$

$$\text{Bailey}: \hat{N} = \frac{n_1(n_2+1)}{(m_2+1)} = \frac{700*(700+1)}{(50+1)} = \mathbf{9662}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{n_1^2(n_2+1)(n_2-m_2)}{(m_2+1)^2(m_2+2)}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{m_2}}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{700^2*(700+1)(700-50)}{(50+1)^2(50+2)} = \mathbf{1650759}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \mathbf{0.14}$$

ΑΜΕΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

✓*Χωρίς επανατοποθέτηση*

(Το m ακολουθεί υπεργεωμετρική κατανομή)

n_1=Σύλληψη - Σήμανση

n_2 =Επανασύλληψη

m_2= Σημαδεμένα

$$\text{Chapman}: \hat{N} = \frac{(n_1+1)(n_2+1)}{m_2+1} - 1$$

(Αμερόληπτη όταν $n_1+n_2>N$)

$$\text{Διακύμανση:} \quad \hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{(n_1+1)(n_2+1)(n_1-m_2)(n_2-m_2)}{(m_2+1)^2(m_2+2)}$$

$$\text{Συντελεστής Παραλλακτικότητας:} \quad C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{m_2}}$$

$n_1 = 50$
$n_2 = 210$
$m_2 = 8$

ΑΜΕΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

✓*Χωρίς επανατοποθέτηση*

$$\text{Chapman}: \hat{N} = \frac{(50+1)(210+1)}{8+1} - 1 = \mathbf{1195}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{(50+1)(210+1)(50-8)(210-8)}{(8+1)^2(8+2)} = \mathbf{112712}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \mathbf{0.35}$$

ΑΜΕΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ
✓*Χωρίς επανατοποθέτηση*

$n_1 = 700$
$n_2 = 200$
$m_2 = 50$

$$\text{Chapman}: \hat{N} = \frac{(700+1)(200+1)}{50+1} - 1 = \mathbf{2762}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{(700+1)(200+1)(700-50)(200-50)}{(50+1)^2(50+2)} = \mathbf{101572}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \mathbf{0.14}$$

ΑΜΕΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ
✓*Χωρίς επανατοποθέτηση*

$n_1 = 700$

$n_2 = 700$

$m_2 = 50$

$$\text{Chapman}: \hat{N} = \frac{(700+1)(700+1)}{50+1} - 1 = \mathbf{9634}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{(700+1)(700+1)(700-50)(700-50)}{(50+1)^2(50+2)} = \mathbf{1535038}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \mathbf{0.14}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

✓*Με επανατοποθέτηση*

(Το n_2 ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή)

$$\text{Petersen}: \hat{N} = \frac{n_1 n_2}{m_2}$$ *(Αμερόληπτη)*

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{n_2 n_1^2 (n_2 - m_2)}{(m_2)^2 (m_2 + 1)}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{m_2}}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

✓*Με επανατοποθέτηση*

$n_1 = 700$

$n_2 = 700$

$m_2 = 50$

$$\text{Petersen}: \hat{N} = \frac{700 * 700}{50} = \mathbf{9800}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{700 * 700^2 (700 - 50)}{(50)^2 (50 + 1)} = \mathbf{1748627}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \mathbf{0.14}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

✓*Με επανατοποθέτηση*

$n_1 = 1000$

$n_2 = 600$

$m_2 = 60$

$$\text{Petersen}: \hat{N} = \frac{1000 * 600}{60} = \mathbf{10000}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{600 * 1000^2 (600 - 60)}{(60)^2 (60 + 1)} = \mathbf{2568306}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{60}} = \mathbf{0.14}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

✓Με επανατοποθέτηση

$n_1 = 900$

$n_2 = 400$

$m_2 = 65$

$$\text{Petersen} : \hat{N} = \frac{900 * 400}{65} = \mathbf{5538}$$

$$\hat{V}_{(\hat{N})} = \frac{400 * 900^2 (400 - 65)}{(65)^2 (65 + 1)} = \mathbf{970199}$$

$$C_{(\hat{N}_1)} = \frac{1}{\sqrt{65}} = \mathbf{0.12}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

✓*Χωρίς επανατοποθέτηση*

(Το n_2 ακολουθεί αρνητική υπεργεωμετρική κατανομή)

$$\hat{N} = \frac{n_2(n_1+1)}{m_2} - 1$$ *(Αμερόληπτη)*

$$V_{\hat{N}} \approx \frac{N^2}{m_2}$$

$$C_{(\hat{N})} = \sqrt{\frac{(n_1 - m_2 + 1)}{m_2(n_1+2)}}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

✓Χωρίς επανατοποθέτηση

$n_1 = 900$

$n_2 = 400$

$m_2 = 65$

$$\hat{N} = \frac{400(900+1)}{65} - 1 = \mathbf{5544}$$

$$V_{\hat{N}} \approx \frac{5544^2}{65} = \mathbf{452795}$$

$$C_{(\hat{N})} = \sqrt{\frac{(900-65+1)}{65(900+2)}} = \mathbf{0.13}$$

ΗΜΙΑΝΟΙΚΤΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ

Μόνο εκροές (θάνατοι, μεταναστεύσεις από τον πληθυσμός)

Πρέπει οι απώλειες να είναι αναλογικά ίδιες και για το σεσημασμένο και για το μη σεσημασμένο τμήμα του πληθυσμού

Μόνο εισροές (γεννήσεις, μεταναστεύσεις προς τον πληθυσμός)

Σε αυτή την περίπτωση η εκτίμηση αφορά το μέγεθος του πληθυσμού κατά το χρόνο της δεύτερης συλλογής (όχι της πρώτης όπως συμβαίνει στις άλλες περιπτώσεις)

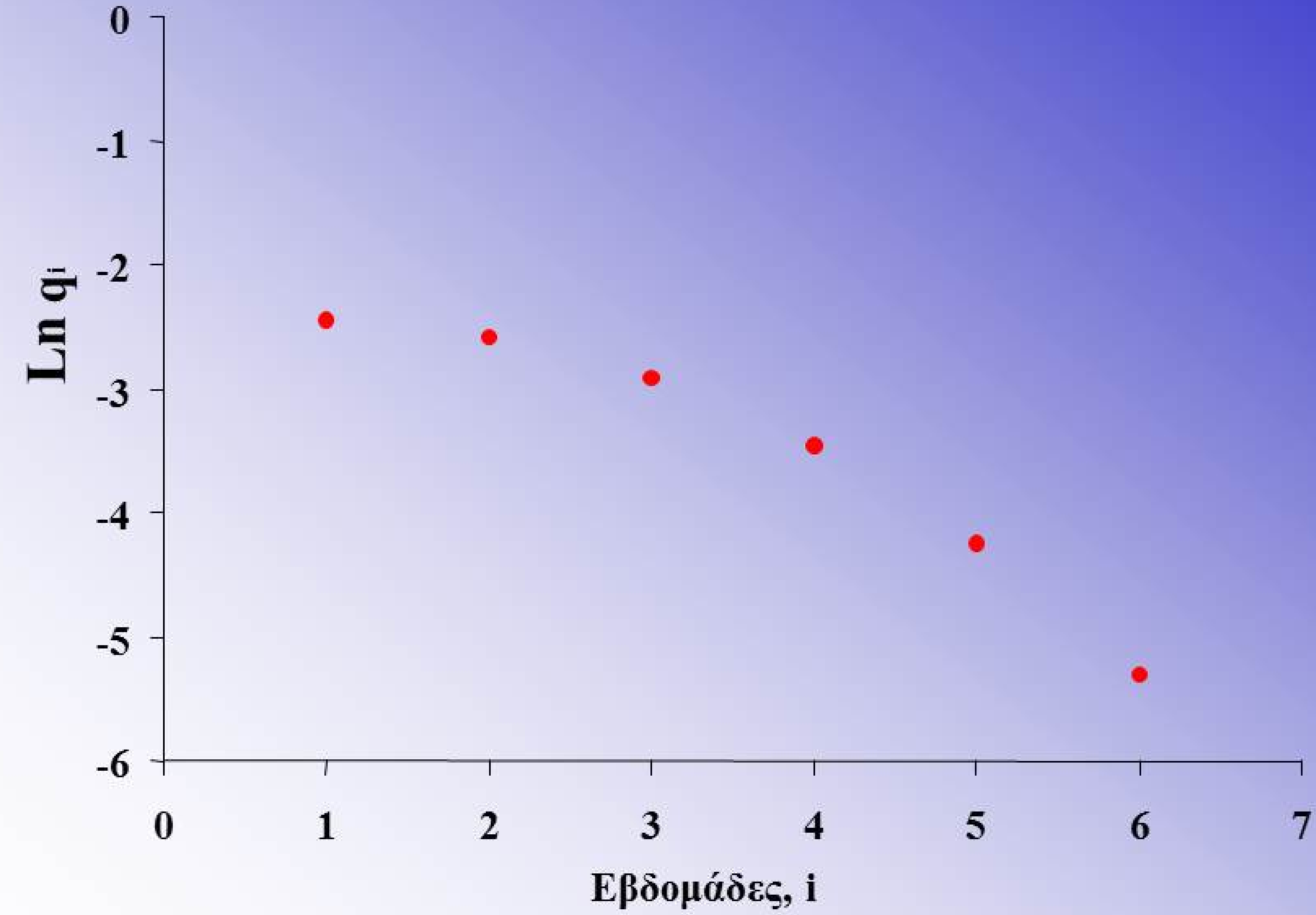
ΑΝΟΙΚΤΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ
✓Θετική μέθοδος Jackson

Μια αρχική σύλληψη-σήμανση
πολλαπλές επανασυλλήψεις απελευθερώσεις χωρίς νέες σημάνσεις

i	$r_{i} = n_0$	n_i	m_i
0	1558		
1		1500	130
2		1200	90
3		1100	60
4		950	30
5		1050	15
6		1000	5

ΑΝΟΙΚΤΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ
✓Θετική μέθοδος Jackson

i	r_i	n_i	m_i	$q_i=m_i/n_i$	$\ln q_i$
0	1558				
1		1500	130	0.0867	-2.446
2		1200	90	0.0750	-2.590
3		1100	60	0.0545	-2.909
4		950	30	0.0316	-3.455
5		1050	15	0.0143	-4.248
6		1000	5	0.0050	-5.298



Ln q_i
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
0
1
2
3
4
5
6
7
Εβδομάδες, i

$Y = a + bX$

$$a = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

X_i	r_i	n_i	m_i	$q=m_i/n_i$	Y $\ln q_i$	X^2	XY
0	1558						
1		1500	130	0,0867	-2,446	1,00	-2,44569
2		1200	90	0,0750	-2,590	4,00	-5,18053
3		1100	60	0,0545	-2,909	9,00	-8,72616
4		950	30	0,0316	-3,455	16,00	-13,8211
5		1050	15	0,0143	-4,248	25,00	-21,2425
6		1000	5	0,0050	-5,298	36,00	-31,7899
21					-20,95	91,00	-83,21

$$a = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = -0,5653$$

$$a = \frac{-20.95 \ * 91 \ - \ 21 \ * \ (-83.21)}{6 \ * 91 \ - \ 21^2} = -1.5127$$

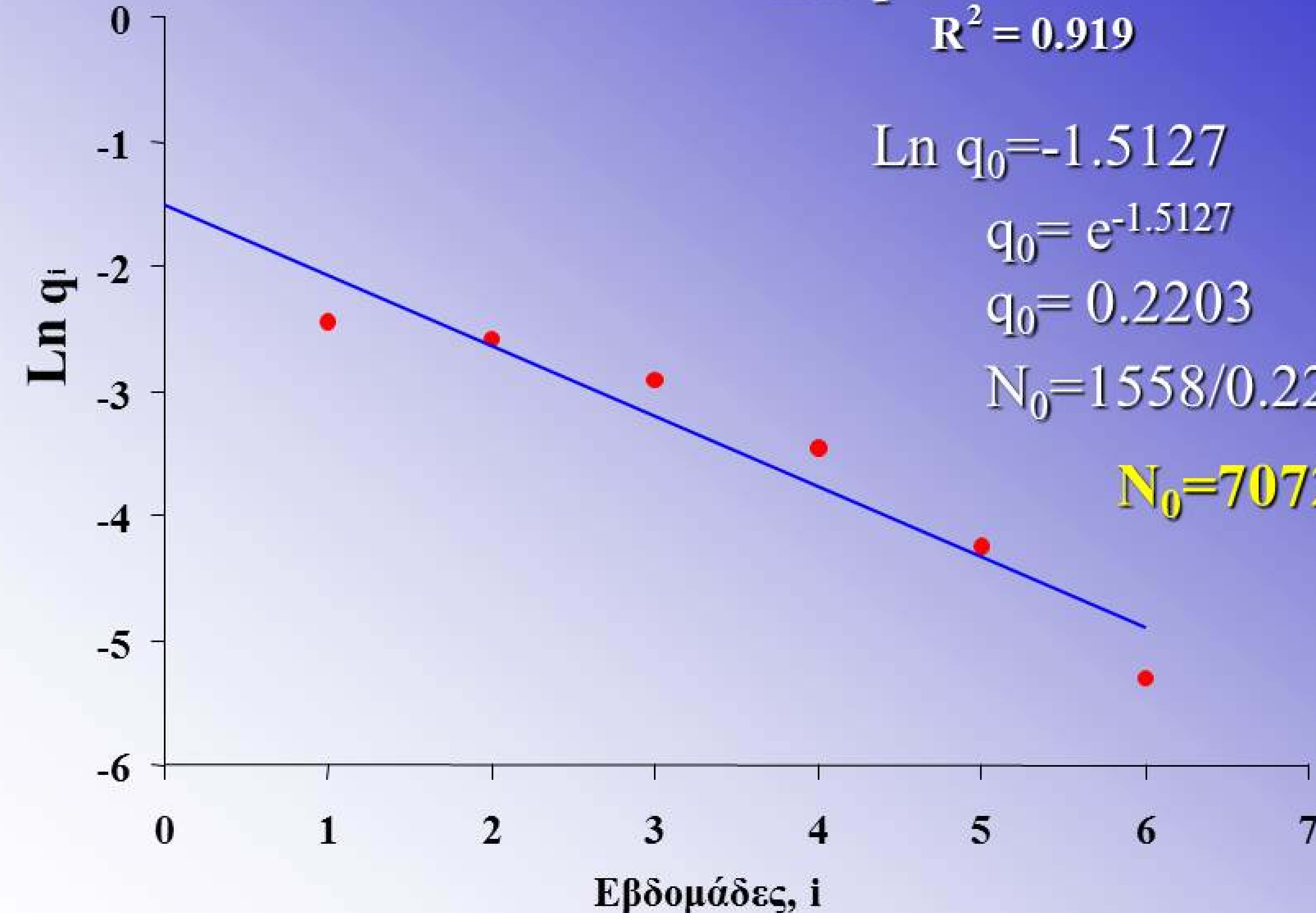
Y=a + bX

ΑΝΟΙΚΤΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ

✓Θετική μέθοδος Jackson

$\mathrm{Ln}\ q_i = -0.5653\ i - 1.5127$

$R^2 = 0.919$



$\mathrm{Ln}\ q_0 = -1.5127$

$q_0 = e^{-1.5127}$

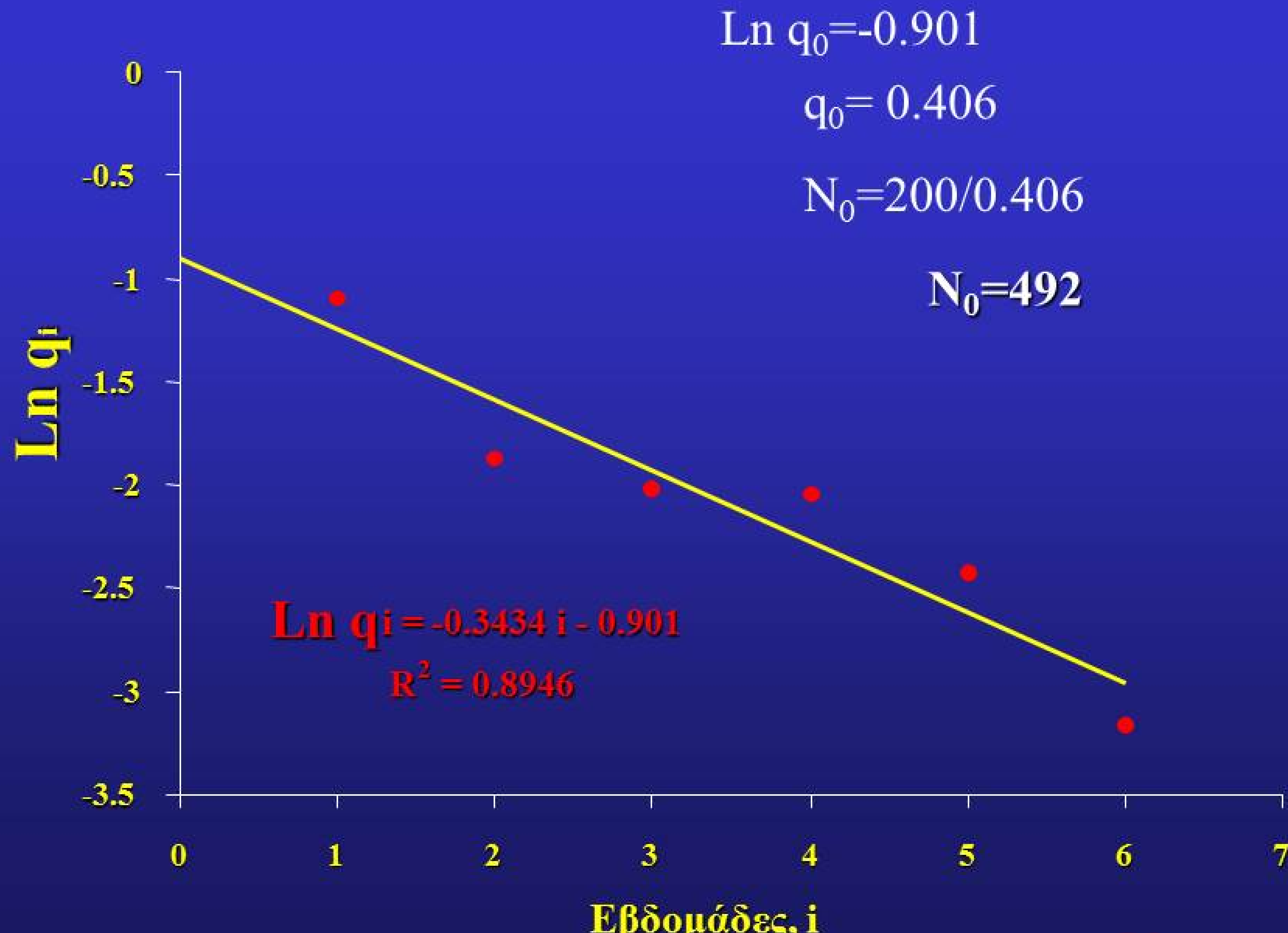
$q_0 = 0.2203$

$N_0 = 1558/0.2203$

$N_0 = 7072$

$Y = a + bX$

i	r_i	n_i	m_i	$q=m_i/n_i$	$\ln q_i$
0	200				
1		90	30	0.3333	-1.099
2		130	20	0.1538	-1.872
3		120	16	0.1333	-2.015
4		85	11	0.1294	-2.045
5		45	4	0.0889	-2.420
6		95	4	0.0421	-3.168



Ln q_0=-0.901
q_0= 0.406
N_0=200/0.406
N_0=492
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
Ln q_i
Ln q_i = -0.3434 i - 0.901
R^2 = 0.8946
0
1
2
3
4
5
6
7
Εβδομάδες, i

Y=a + bX

ΚΛΕΙΣΤΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ

Μια αρχική σύλληψη-σήμανση
πολλαπλές επανασυλλήψεις απελευθερώσεις

ΜΕ νέες σημάνσεις ΙΔΙΟΥ τύπου με την αρχική

ΜΕΘΟΔΟΣ SCHNABEL

ΜΕΘΟΔΟΣ SCHUMACHER ΚΑΙ ESCHMEYER

Προϋποθέτουν σχετικά σταθερό πληθυσμό

Χρόνος	Συλλήψεις Ct	Αριθμός επανασυλληφθέντων Rt	Νέες συλλήψεις-σημάνσεις Newly marked	Σύνολο ΗΔΗ σημασμένων Mt	CtMt	$CtMt^2$	RtMt
Εβδ. 1	10	0	10	0	0	0	0
Εβδ. 2	27	0	27	10	270	2700	0
Εβδ. 3	17	0	17	37	629	23273	0
Εβδ. 4	7	0	7	54	378	20412	0
Εβδ. 5	1	0	1	61	61	3721	0
Εβδ. 6	5	0	5	62	310	19220	0
Εβδ. 7	6	2	4	67	402	26934	134
Εβδ. 8	15	1	14	71	1065	75615	71
Εβδ. 9	9	5	4	85	765	65025	425
Εβδ. 10	18	5	13	89	1602	142578	445
Εβδ. 11	16	4	12	102	1632	166464	408
Εβδ. 12	5	2	3	114	570	64980	228
Εβδ. 13	7	2	4	117	819	95823	234
Εβδ. 14	19	3		121	2299	278179	363
Σύνολο	162	24	121	990	10802	984924	2308

Schnabel:

$$\hat{N} = \frac{\sum_t (C_t M_t)}{\sum_t (R_t)}$$

$$\text{Variance}\left(\frac{1}{\hat{N}}\right) = \frac{\sum_t (R_t)}{(\sum_t C_t M_t)^2}$$

$$\text{s.e.}\left(\frac{1}{\hat{N}}\right) = \sqrt{\text{Variance}\left(\frac{1}{\hat{N}}\right)}$$

Schumacher-Escmeyer:

$$\hat{N} = \frac{\sum_t (C_t M_t^2)}{\sum_t (R_t M_t)}$$

$$\text{Variance}\left(\frac{1}{\hat{N}}\right) = \frac{\sum_t (R_t^2 / C_t) - \sum_t (R_t M_t)^2 / \sum_t (C_t M_t^2)}{s - 2}$$

$$\text{s.e..}\left(\frac{1}{\hat{N}}\right) = \sqrt{\frac{\text{Variance}\,(1/\hat{N})}{\sum (C_t M_t^2)}}$$

Χρόνος	Συλλήψεις Ct	Αριθμός επανασυλληφθέντων Rt	Νέες συλλήψεις-σημάνσεις Newly marked	Σύνολο ΗΔΗ σημασμένων Mt	CtMt	$CtMt^2$	RtMt
Εβδ. 1	10	0	10	0	0	0	0
Εβδ. 2	27	0	27	10	270	2700	0
Εβδ. 3	17	0	17	37	629	23273	0
Εβδ. 4	7	0	7	54	378	20412	0
Εβδ. 5	1	0	1	61	61	3721	0
Εβδ. 6	5	0	5	62	310	19220	0
Εβδ. 7	6	2	4	67	402	26934	134
Εβδ. 8	15	1	14	71	1065	75615	71
Εβδ. 9	9	5	4	85	765	65025	425
Εβδ. 10	18	5	13	89	1602	142578	445
Εβδ. 11	16	4	12	102	1632	166464	408
Εβδ. 12	5	2	3	114	570	64980	228
Εβδ. 13	7	2	4	117	819	95823	234
Εβδ. 14	19	3		121	2299	278179	363
Σύνολο	162	24	121	990	10802	984924	2308

$$\text{Schnabel}: \hat{N} = \frac{\sum_t (C_t M_t)}{\sum_t (R_t)} = \frac{10802}{24} = 450$$

$$\text{Schumacher Eschemeyer}: \hat{N} = \frac{\sum_t (C_t M_t^2)}{\sum_t (R_t M_t)} = \frac{984924}{2308} = 427$$

ΑΝΟΙΚΤΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ

Μια αρχική σύλληψη-σήμανση
πολλαπλές επανασυλλήψεις απελευθερώσεις

ΜΕ νέες σημάνσεις ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΥ τύπου

ΜΕΘΟΔΟΣ JOLY-SEBER

Εκτιμά τις πληθυσμιακές διακυμάνσεις

		ημέρες i					
		1	2	3	4	5	
Σύνολο Συλληφθέντων	n_i	85	107	42	33	128	
Σύνολο Σημασμένων	m_i	0	7	6	3	20	
Σύνολο ΜΗ Σημασμένων	$n_i - m_i$	85	100	36	30	108	
Σύνολο Απελευθ/έντων	R_i	77	105	40	28	124	r_h
Ο αριθμός των ατόμων που συνελήφθησαν τη μέρα i και τα οποία είχαν συλλεχθεί τελευταία φορά τη μέρα h	h 1		7	2	0	2	11
	2			4	3	6	13
	3				0	8	8
	4					4	4
	5						0

6 άτομα συνελήφθησαν την ημέρα 3 από αυτά 4 είχαν ξανασυληφθεί στην δεύτερη δειγματοληψία και δύο στην πρώτη δειγματοληψία

Σύνολο ατόμων που είχαν ξανασυληφθεί για τελευταία φορά την 1, 2η, 3... ημέρα.

		ημέρες i					
		1	2	3	4	5	
Σύνολο Συλληφθέντων	n_i	85	107	42	33	128	
Σύνολο Σημασμένων	m_i	0	7	6	3	20	
Σύνολο ΜΗ Σημασμένων	$n_i - m_i$	85	100	36	30	108	
Σύνολο Απελευθ/έντων	R_i	77	105	40	28	124	r_h
Ο αριθμός των ατόμων που συνελήφθησαν τη μέρα i και τα οποία είχαν συλλεχθεί τελευταία φορά τη μέρα h	h 1		7	2	0	2	11
	2			4	3	6	13
	3				0	8	8
	4					4	4
	5						0

Αθροιστικές

	1	2	3	4	5		Z_{i+1}
h 1		7	2	+ 0	+ 2	= 4	Z_2
2			6	3	+ 8	= 11	Z_3
3				3	16	= 16	Z_4
4					20	= 0	Z_5

$$\hat{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{i}}}{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{h}}} + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{i}} \qquad \hat{N}_i = \frac{\hat{M}_i n_i}{m_i}$$

$$\hat{\Phi}_1 = \frac{\hat{M}_2}{R_1} \qquad \hat{\Phi}_i = \frac{\hat{M}_{i+1}}{\hat{M}_i - m_i + R_i}$$

$$\hat{\rho}_i = \frac{m_i}{n_i} \qquad \hat{B}_i = \hat{N}_{i+1} - \hat{\Phi}_i \left(\hat{N}_i - n_i + R_i \right)$$

$$V\left(\hat{N}_i\right) = N_i \left(N_i - n_i\right) \left(\frac{M_i - m_i + R_i}{M_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{R_i} \right) + \frac{1 - \rho_i}{m_i} \right)$$

$$\hat{\sigma}\left(\hat{N}_i\right) = \sqrt{\hat{V}\left(\hat{N}_i\right)}$$

Σύνολο ατόμων που είχαν ξανασυληφθεί για τελευταία φορά την 1, 2η, 3... ημέρα.

Σύνολο Συλληφθέντων

Σύνολο Μαρκαρισμένων

Σύνολο ΜΗ Μαρκαρισμένων

Σύνολο απελευθερωθέντων

$$\hat{M}_i = \frac{R_i Z_i}{r_h} + m_i$$

i	r_h	n_i	m_i	$n_i - m_i$	R_i	Z_i	M_i	N_i
1	11	**85**	0	85	77			
2	13	**107**	7	100	105	4	39.3	600.8
3	8	**42**	6	36	40	11	61.0	427.0
4	4	**33**	3	30	28	16	115.0	1265.0
5	0	**128**	20	108	124	0		

Χρειάζονται τουλάχιστον 3 συλλήψεις-σημάνσεις-απελευθερώσεις

$$\hat{N}_i = \frac{\hat{M}_i n_i}{m_i}$$