Ευκλείδειοι Χώροι

Ορίζουμε ως $\mathbb{R}^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο όλων διατεταμένων n-άδων πραγματικών αριθμών ($x_1, x_2, ..., x_n$). Το $\mathbb{R}^n$ λέγεται <u>ευκλείδειος *n*-χώρος</u> και τα στοιχεία του λέγονται <u>διανύσματα</u> ή <u>σημεία</u>**.** Το x_i λέγεται i-συνταταγμένη του ($x_1, x_2, ..., x_n$).

Έστω $(x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $(y_1, y_2, ...y_m) \in \mathbb{R}^m$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$(x_1, x_2, ...x_n) = (y_1, y_2, ...y_m) \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \quad \text{και} \\ x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n. \end{cases}$$

Με **0** συμβολίζουμε το <u>μηδενικό</u> διάνυσμα, δηλ. το διάνυσμα που έχει όλες τις συντεταγμένες μηδέν.

Στο $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε τις πράξεις:
την <u>πρόσθεση</u>: $(x_1, x_2, ...x_n) + (y_1, y_2, ...y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...x_n + y_n)$
και τον <u>αριθμητικό πολλαπλασιασμό</u>: $\lambda(x_1, x_2, ...x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ...\lambda x_n)$.
Θέτουμε $(x_1, x_2, ...x_n)$ - $(y_1, y_2, ...y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, με $A \neq \emptyset$. Το A λέγεται <u>υπόχωρος</u> του $\mathbb{R}^n$ αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) Αν $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta} \in A$ τότε $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in A$,
ii) Αν $\boldsymbol{\alpha} \in A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in A$.

Πρόταση
Κάθε υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα **0** του $\mathbb{R}^n$.
Τα {**0**} και $\mathbb{R}^n$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, (όπου **0** το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$).

Πρόταση
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Το A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

Το μηδενικό διάνυσμα **0** του $\mathbb{R}^n$ ανήκει στο A.
Αν $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta} \in A$ τότε $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in A$.
Αν $\boldsymbol{\alpha} \in A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in A$.

Αν A, B υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ και $A \subseteq B$ τότε λέμε ότι το A είναι <u>υπόχωρος του *B*</u>.

Αν $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_\kappa \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\kappa \in \mathbb{R}$, τότε το $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + ... + \lambda_\kappa \boldsymbol{\alpha}_\kappa$ λέγεται <u>γραμμικός συνδυασμός</u> των $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_\kappa$.

Αν θέσουμε Α = { $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_\kappa$ }, τότε με S(A) συμβολίζουμε το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_\kappa$. Το S(A) λέγεται <u>παραγόμενο σύνολο από το Α με γραμμικούς συνδυασμούς</u>.

Πρόταση
Το S(A) είναι υπόχωρος.

Ασκήσεις

1) Εξετάστε πότε ισχύουν οι ισότητες: $\{x\}=\{y,z\}$, $(a,d,2,h)=(d,h,e,2)$, $\{\rho,\lambda\}=\{\lambda,\rho\}$, $(\kappa,\nu)=(\nu,\kappa)$.
2) Δείξτε ότι το A = {(x, x + y): x, y$\in\mathbb{R}$} είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
3) Δείξτε ότι το B = {(x, x^2): x$\in$ $\mathbb{R}$} δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
4) Βρείτε για ποιες τιμές του ρ το σύνολο Γ = {(x, x + ρ, x): x$\in$ $\mathbb{R}$} είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
5) Εξετάστε αν το $\Delta=\{(x,y,z,w):x+y+z+w=0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.
6) Εξετάστε αν το
$\mathrm{E}=\{(x,y,z,w):\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z+\delta_1w=0,\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z+\delta_2w=0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, όπου $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\delta_2$ σταθερές.
7) Ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ είναι ένα από τα ακόλουθα:
ή το σύνολο που περιέχει μόνο το σημείο της αρχής των αξόνων, ή το σύνολο των σημείων μιας ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων, ή όλο το $\mathbb{R}^3$.
8) Ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι ένα από τα ακόλουθα:
ή το σύνολο που περιέχει μόνο το σημείο της αρχής των αξόνων, ή το σύνολο των σημείων μιας ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων, ή το σύνολο των σημείων ενός επιπέδου που περνάει από την αρχή των αξόνων, ή όλο το $\mathbb{R}^3$.
9) Δείξτε ότι $S(\{1,2),(1,3)\}=\mathbb{R}^2$.

Τα $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$,..., $\mathbf{a_\kappa}$ $\in$ $\mathbb{R}^n$ λέγονται <u>γραμμικά ανεξάρτητα</u> αν η εξίσωση $\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}$ +... + $\lambda_\kappa\,\mathbf{a_\kappa}=\mathbf{0}$ έχει μόνο την μηδενική λύση, δηλ. όταν

$$\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}+\ldots+\lambda_\kappa\,\mathbf{a_\kappa}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_\kappa=0.$$

Αν τα $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$,..., $\mathbf{a_\kappa}$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε λέγονται <u>γραμμικά εξαρτημένα.</u>

Πρόταση
Τα $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$,..., $\mathbf{a_\kappa}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε και μόνο όταν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι τα (1, 1), (1, 2) είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2) Εξετάστε ποιά από τα (1, 1), (1, 2), (2, 1) είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο.
3) Όταν ένα σύνολο διανυσμάτων A του $\mathbb{R}^n$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα τότε τα διανύσματα του A είναι γραμμικά εξαρτημένα.
4) Αν τα $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$,..., $\mathbf{a_\kappa}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε η εξίσωση
$$\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}+\ldots+\lambda_\kappa\,\mathbf{a_\kappa}=\mu_1\mathbf{a_1}+\mu_2\mathbf{a_2}+\ldots+\mu_\kappa\,\mathbf{a_\kappa}$$
ισχύει τότε και μόνο όταν $\lambda_1=\mu_1$, $\lambda_2=\mu_2$, ..., $\lambda_\kappa=\mu_\kappa$.
5) Έστω A = {$\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_n}$}όπου $\mathbf{e_i}$ τα μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^n$,δηλ.

$\mathbf{e_i} = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, ..., \delta_{in})$, με $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ αν } i=j \\ 0 \text{ αν } i \neq j \end{cases}$.

Τότε $S(A) = \mathbb{R}^n$.

Ένα σύνολο $A = \{ \mathbf{\alpha_1}, \mathbf{\alpha_2},..., \mathbf{\alpha_\kappa} \} \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>βάση</u> ενός υπόχωρου $X \subseteq \mathbb{R}^n$, όταν:

i) $S(A) = X$, και
ii) τα στοιχεία του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα
i) Κάθε υπόχωρος $X \neq \{\mathbf{0}\}$ έχει βάση.
ii) Αν τα $\{\mathbf{\alpha_1}, \mathbf{\alpha_2},.., \mathbf{\alpha_\kappa}\}$και $\{\mathbf{\beta_1}, \mathbf{\beta_2},..., \mathbf{\beta_\lambda}\}$ είναι δύο βάσεις ενός υπόχωρου X, τότε $\kappa = \lambda$.
iii) Αν $\{\mathbf{\alpha_1}, \mathbf{\alpha_2}, ..., \mathbf{\alpha_\kappa}\}$ είναι βάση του υπόχωρου X, $\{\mathbf{\beta_1}, \mathbf{\beta_2},..., \mathbf{\beta_\lambda}\}$ είναι βάση του υπόχωρου Y, και $X \subseteq Y$, τότε $\kappa \leq \lambda$. Το $\kappa = \lambda$ ισχύει μόνο όταν $X = Y$.

Ορίζουμε ως <u>διάσταση</u> ενός υπόχωρου X μία τιμή που την συμβολίζουμε dimX και ισούται: με το πλήθος των στοιχείων μίας βάσης του X αν $X \neq \{\mathbf{0}\}$, και μηδέν αν $X = \{\mathbf{0}\}$.

Πρόταση
Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι οι εξής:
Το $\{\mathbf{0}\}$, το $\mathbb{R}^2$, καθώς και οι ευθείες που περνούν από το $\mathbf{0}$. Με αντίστοιχες διαστάσεις 0,2,1.
Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ είναι οι εξής:
Το $\{\mathbf{0}\}$, το $\mathbb{R}^3$, οι ευθείες που περνούν από το $\mathbf{0}$, καθώς και τα επίπεδα που περνούν από το $\mathbf{0}$. Με αντίστοιχες διαστάσεις 0,3,1, 2.

Ασκήσεις
1) dim $\mathbb{R}^n = n$.
2) Βρείτε την διάσταση του υπόχωρου $X = \{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 0\}$.
3) Βρείτε την διάσταση του υπόχωρου $X = \{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 0, x + 2y = 0\}$.
4) Περιγράψτε ως σύνολο τον υπόχωρο που έχει βάση τα διανύσματα (1, 2, 3), (1, -2, 1).
5) Τα $\mathbf{\alpha_1}, \mathbf{\alpha_2},..., \mathbf{\alpha_\kappa}$ είναι βάση του υπόχωρου $S(\{\mathbf{\alpha_1}, \mathbf{\alpha_2},..., \mathbf{\alpha_\kappa}\})$ τότε και μόνο όταν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
6) Ο μέγιστος αριθμός από τα $\mathbf{\alpha_1}, \mathbf{\alpha_2},..., \mathbf{\alpha_\kappa} \in \mathbb{R}^n$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα αποτελούν βάση του $S(\{\mathbf{\alpha_1}, \mathbf{\alpha_2},..., \mathbf{\alpha_\kappa}\})$.

Μία εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b \;,$$

όπου $a_1, a_2, ...a_n, b$ σταθερές και $x_1, x_2, ...x_n$ άγνωστοι, λέγεται **γραμμική**.

Αν $b = 0$, τότε η προηγούμενη εξίσωση λέγεται **ομογενής**, και η

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$$

λέμε ότι είναι η **αντίστοιχη ομογενής** της

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b \ .$$

Πρόταση

Αν τα X, Y είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ τότε:

α) το X $\cap$ Y είναι υπόχωρος,

β) το X$\cup$Y είναι υπόχωρος αν X$\subseteq$Y ή Y$\subseteq$X.

Πρόταση

α) Το σύνολο των $(x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν μία ομογενής γραμμική εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$ αποτελούν υπόχωρο.

β) Το σύνολο των $(x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν ένα σύστημα m ομογενών γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0\\
&.....\\
&.....\\
&.....\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned}$$

(όπου τα a_{ij} σταθερές), αποτελούν υπόχωρο.

γ) Αν $(\xi_1, \xi_2, ...\xi_n)$ είναι μία λύση ενός συστήματος m γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2\\
&.....\\
&.....\\
&.....\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

(οπου τα a_{ij} και b_i σταθερές), τότε κάθε άλλη λύση είναι της μορφής $(x_1, x_2, ...x_n) + (\xi_1, \xi_2, ...\xi_n)$, όπου $(x_1, x_2, ...x_n)$ είναι λύση του συστήματος των αντίστοιχων ομογενών γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0\\
&.....\\
&.....\\
&.....\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0\,.
\end{aligned}$$

Πρόταση

Κάθε υπόχωρος αποτελεί το σύνολο των λύσεων ενός συστήματος ομογενών γραμμικών εξισώσεων.

Οι ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$.

Πρώτα δίνουμε δύο ορισμούς που ισχύουν γενικότερα για τους $\mathbb{R}^n$:
Μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ λέμε την τιμή

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + \ldots + (\alpha_n)^2},$$

όπου $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο των $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$ την τιμή

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \ldots + \alpha_n\beta_n,$$

όταν $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Θεώρημα
Έστω $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^2$ μη μηδενικά, τότε
$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = |\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|$ συνθ, όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$.

Πόρισμα
i) $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \Leftrightarrow$ "ή κάποιο από τα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ είναι μηδέν ή τα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ είναι κάθετα".
ii) $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = |\boldsymbol{\alpha}|^2$

Μια ευθεία στο $\mathbb{R}^3$ (ή στο $\mathbb{R}^2$) λέμε το σύνολο των σημείων (x, y, z) της μορφής t$\mathbf{a}$ + $\mathbf{b}$, με $t \in \mathbb{R}$, όπου $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ σταθερά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ (ή του $\mathbb{R}^2$) με $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Η ευθεία αυτή λέμε ότι είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{a}$ και περνά από το σημείο $\mathbf{b}$. Αυτή τη μορφή παράστασης της ευθείας τη λέμε παραμετρική.

Πρόταση
Μία ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ αποτελείται από τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής ax + by = c, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ σταθερές με τα a, b όχι και τα δύο μηδέν. Το διάνυσμα (a,b) είναι κάθετο στην ευθεία.

Πρόταση
Ένα επίπεδο αποτελείται από σημεία (x, y, z) που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής ax + by + cz = d, όπου a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ σταθερές με (a, b, c) $\neq \mathbf{0}$.
Το διάνυσμα $\mathbf{a}$ = (a, b, c) είναι κάθετο στο επίπεδο.

Πίνακες

<u>Πίνακας</u> $m \times n$ είναι μία διάταξη $m \times n$ στοιχείων a_{ij}, με $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$, που συνηθίζουμε να τον συμβολίζουμε με $[\, a_{ij} \,]$ ή με ένα κεφαλαίο γράμμα και να τον παριστάνουμε με έναν ορθογώνιο πλέγμα θέσεων που σχηματίζουν m γραμμές και n στήλες που καταλαμβάνουν τα a_{ij} ως εξής:

$$[\, a_{ij} \,] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & & . \\ . & . & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Έστω το γραμμικό σύστημα εξισώσεων Σ:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + \ldots.. + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_2 + \ldots.. + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \ldots.. \\ & \ldots.. \\ & \\ & \ldots.. \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_2 + \ldots.. + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

όπου a_{ij}, b_i σταθερές και x_j άγνωστος,
και ο πίνακας Α:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Θα λέμε ότι το σύστημα Σ αντιστοιχεί στον πίνακα Α και αντίστροφα, ο πίνακας Α αντιστοιχεί στο σύστημα Σ.

Παρατηρούμε ότι οι ακόλουθες πράξεις σε έναν γραμμικό σύστημα εξισώσεων δίνουν ισοδύναμο σύστημα:

1) Η αντιμετάθεση δύο εξισώσεων.
2) "Η πρόσθεση σε μία εξίσωση ένα πολλαπλάσιο μίας άλλης".
3) Η αντικατάσταση μίας εξίσωσης με ένα "μη μηδενικό πολλαπλάσιο της".

Ορίζουμε ως <u>στοιχειώδεις πράξεις</u> σε έναν πίνακα τις ακόλουθες:

1) Την αντιμετάθεση δύο γραμμών.

2) Την πρόσθεση σε μία γραμμή ένα πολλαπλάσιο μίας άλλης
3) Την αντικατάσταση μίας γραμμής με ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιό της .

Πρόταση
Έστω πίνακας B που προκύπτει από τον πίνακα A μετά από στοιχειώδεις πράξεις. Τότε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που αντιστοιχεί στον A είναι ισοδύναμο με αυτόν που αντιστοιχεί στο B.

Ένα πίνακας λέγεται κλιμακωτός αν ο πρώτος μη μηδενικός όρος κάθε γραμμής βρίσκεται σε δεξιότερη θέση από αυτή του πρώτου μη μηδενικού όρου της προηγούμενης γραμμής.

Πρόταση
Κάθε πίνακας, μετά από κάποιες στοιχειώδεις πράξεις, γίνεται κλιμακωτός.

Ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ενός πίνακα A λέγεται τάξη του πίνακα A, και συμβολίζεται rankA.

Πρόταση
Αν B είναι πίνακας που προκύπτει από τον A μετά από στοιχειώδεις πράξεις, τότε rankA = rankB.

Πρόταση
Η τάξη ενός κλιμακωτού πίνακα ισούται με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών του.

Πρόταση
Έστω B κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει από τον A μετά από στοιχειώδεις πράξεις. Θέτουμε $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις γραμμές του A, και $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2,\ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις γραμμές του B. Τότε

$$S(\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}) = S(\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2,\ldots, \boldsymbol{\beta}_m\}).$$

Στους πίνακες ορίζουμε τις πράξεις:

1) Την πρόσθεση. Αν $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ δύο πίνακες $m\times n$, τότε ορίζουμε $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]$, όπου $[c_{ij}]$ πίνακας $m\times n$ με $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, για κάθε *i, j.*
2) Τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό. Αν $[a_{ij}]$ πίνακας $m\times n$ και λ αριθμός τότε ορίζουμε $\lambda[a_{ij}] = [b_{ij}]$,όπου $[b_{ij}]$ πίνακας $m\times n$ με $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, για κάθε *i, j.*
3) Το γινόμενο πινάκων. Αν $[a_{ij}]$ πίνακας $m\times n$ και $[b_{jk}]$ πίνακας $n\times l$, τότε ορίζουμε $[a_{ij}]\cdot [b_{jk}] = [c_{ik}]$, όπου $[c_{ik}]$ πίνακας $m\times l$ με $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ik}$, για κάθε *i, k.*

Πρόταση (Ιδιότητες των πράξεων πινάκων)

Έστω A, B, C πίνακες και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε (εφόσον οι διαστάσεις των πινάκων επιτρέπουν τις πράξεις), έχουμε τις ισότητες:

(i) $(A+B)C = AC + BC$

(ii) $A(B+C) = AB + AC$

(iii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

(iv) $(AB)C = A(BC)$

Σημειώνουμε ότι εν γένει $AB \neq BA$.

Τους πίνακες $[a_{ij}]$ όπου $a_{ij} = 0$, για κάθε i, τους λέμε <u>μηδενικούς</u> και τους συμβολίζουμε με O.
Οι $n \times n$ πίνακες λέγονται <u>τετραγωνικοί</u>.
Τους τετραγωνικούς πίνακες $[a_{ij}]$ με $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ i = j \\ 0 & \alpha\nu\ i \neq j \end{cases}$, για κάθε *i, j,* τους λέμε <u>ταυτοτικούς</u> και τους συμβολίζουμε με I.

Αν I είναι ο $n \times n$ ταυτοτικός, B πίνακας $n \times l$ και C πίνακας $l \times n$, τότε

$$\mathrm{I} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B},\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{I} = \mathrm{C}.$$

Ένας πίνακας A λέγεται <u>αντιστρέψιμος</u> αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I},$$

όπου I ταυτοτικός, οπότε ο B λέγεται <u>αντίστροφος</u> του A.

Πρόταση

i) Αν ο A έχει αντίστροφο B τότε οι A, B είναι της μορφής $n \times n$.

ii) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε έχει μοναδικό αντίστροφο.

Ο αντίστροφος του A, αν υπάρχει, συμβολίζεται A^{-1}.

Ασκήσεις

1) Δώστε παραδείγματα πινάκων A, B για τους οποίους δεν ορίζεται το γινόμενο AB αλλά ορίζεται το BA.
2) Δώστε παράδειγμα πινάκων A, B για τους οποίους ορίζονται τα γινόμενα AB, BA και i) AB $\neq$ BA ii) AB = BA.
3) Δείξτε ότι ο A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.
4) Βρείτε την τάξη του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Πρόταση

Έστω πίνακας A nxn. Θέτουμε X τον πίνακα [A|I] όπου I ο ταυτοτικός nxn (άρα ο X είναι πίνακας nx2n). Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε και μόνο όταν ο πίνακας X μετά από στοιχειώδεις πράξεις παίρνει τη μορφή [I|B] , οπότε $A^{-1} = B$.

Σημειώνουμε ότι η προηγούμενη Πρόταση στηρίζεται στο εξής:

Πρόταση

Μετά από κάθε στοιχειώδης πράξη ενός πίνακα A mxn, ο πίνακας A μετασχηματίζεται σε έναν πίνακα BA (γινόμενο πινάκων B και A) όπου ο B είναι αντστρέψιμος πίνακας.
Υπόδειξη για την απόδειξη:
Για την μετάθεση π.χ. των γραμμών των 1 και 2 πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά τον A με τον πίνακα $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & O_{1,m-2} \\ 1 & 0 & O_{1,m-2} \\ O_{m-2,1} & O_{m-2,1} & I_{m-2,m-2} \end{bmatrix}$.
Με O συμβολίζουμε τους μηδενικούς πίνακες και με I τους ταυτοτικούς. Οι δείκτες δηλώνουν τις διαστάσεις των πινάκων.
Για τον πολλαπλασιασμό π.χ. της γραμμής 1 με τον αριθμό x πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά τον A με τον πίνακα $B = \begin{bmatrix} x & O_{1,m-1} \\ O_{m-1,1} & I_{m-1,m-1} \end{bmatrix}$.
Την στοιχειώδη πράξη π.χ. όπου πολλαπλασιάζουμε την $1^{η}$ γραμμή με χ και την προσθέτουμε στην 2η, πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & O_{1,m-2} \\ x & 1 & O_{1,m-2} \\ O_{m-2,1} & O_{m-2,1} & I_{m-2,m-2} \end{bmatrix}.$$

Αν A είναι $n \times n$ πίνακας τότε συμβολίζουμε με A_{ij} τον $(n-1)\times(n-1)$ που σχηματίζεται αν από τον A αφαιρέσουμε την i-γραμμή και την j-στήλη.

Για κάθε $n \times n$ πίνακα A ορίζουμε μία τιμή που λέγεται <u>ορίζουσα</u> και συμβολίζεται detA ή |A|. Ο ορισμός γίνεται επαγωγικά για n = 2, 3, 4, … .

- Για 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ορίζουμε detA = ad – bc.
- Για $n \times n$ πίνακα A, με $n \geq 3$, ισχύει ότι

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \text{ , για κάθε j,}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \text{, για κάθε i.}$$

Πρόταση
Ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε και μόνο αν $\det A \neq 0$.

Ασκήσεις

1) Βρείτε μια βάση και την διάσταση του υπόχωρου S(A), όπου A = {(1, 2, 2, 1), (1, 3, 1, 4), (0, 1, 1, 1), (3, 9, 8, 12) }.
2) Εξετάστε για ποια x, y ο πίνακας $\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ xy^7 & x^9 y & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.

Πρόταση
Αν A, B πίνακες $n \times n$, και I ταυτοτικός, τότε det(AB) = det(A)det(B), detI = 1.

Αν $[a_{ij}]$ πίνακας $m \times n$, $[x_j]$ πίνακας $n \times 1$ και $[b_i]$ πίνακας $m \times 1$, τότε η εξίσωση $[a_{ij}] \cdot [x_j] = [b_i]$, δηλ. η

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & & . \\ . & . & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix},$$

είναι ισοδύναμη με το σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}.$$

Με M_{mn} θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων.

Άσκηση

Αν Α $\in M_{mn}$, τότε ο πίνακας Α ορίζει μια απεικόνιση Α: $M_{n1} \to M_{m1}$ ως εξής:

$$A(X) = A \cdot X, \text{ για κάθε } X \in M_{n1}.$$

Έστω Β $\in M_{nl}$, τότε ορίζουμε παρόμοια την απεικόνιση Β: $M_{l1} \to M_{n1}$, και παίρνουμε την σύνθεση των δύο συναρτήσεων $A \circ B$: $M_{l1} \to M_{m1}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $A \circ B$ ισούται αυτήν που ορίζει ο πίνακας $A \cdot B$, δηλ.

$$A \circ B(X) = (A \cdot B) \cdot X, \text{ για κάθε } X \in M_{l1}.$$

Μία απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>γραμμική</u> αν έχει τις ιδιότητες:

α) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$

]β) $f(\lambda\mathbf{a}) = \lambda f(\mathbf{a})$

για κάθε **a, b** $\in \mathbb{R}^m$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Χωρίς βλάβη μπορούμε να ταυτίζουμε τους πίνακες $n \times 1$ με τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (a_1, a_2, ..., a_n) = \mathbf{a}$$

Πρόταση

Έστω A πίνακας $m \times n$, τότε η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

είναι γραμμική, και αντίστροφα: για κάθε γραμμική f υπάρχει ένας τέτοιος πίνακας A.

Έστω Α = $[a_{ij}] \in M_{m,n}$ και $\boldsymbol{b} \in M_{m,1} = \mathbb{R}^m$, τότε ορίζουμε τον <u>επαυξημένο</u> πίνακα

$$[A|\, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Προφανώς, ο πίνακας $[A|\, \boldsymbol{b}]$ είναι $m \times (n + 1)$.

Πρόταση

Έστω ότι ο πίνακας $[A|\, \boldsymbol{b}]$ μετά από στοιχειώδεις πράξεις γίνεται $[A'|\, \boldsymbol{b}']$, τότε οι εξισώσεις $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ και $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα
Η εξίσωση A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$, όπου A $m \times n$ πίνακας, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, έχει λύση ως προς $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ τότε και μόνο όταν

$$\text{rankA} = \text{rank}[\text{A}|\,\boldsymbol{b}].$$

Έχει μοναδική λύση τότε και μόνο όταν rankA = rank[A| $\boldsymbol{b}$] = n.
Έχει άπειρες λύσεις αν rankA = rank[A: $\boldsymbol{b}$] < n.
Αν $\boldsymbol{x}_\mu$ είναι μία (<u>μερική</u>) λύση της εξίσωσης A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$, τότε κάθε λύση της είναι της μορφής $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_\mu$, όπου $\boldsymbol{x}_0$ λύση της (<u>αντίστοιχης ομογενούς</u>) A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{0}$.

Πρόταση
Το σύνολο των λύσεων $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ της εξίσωσης A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{0}$, όπου $A \in M_{m,n}$ και $\boldsymbol{0}$ το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
Έχει μοναδική λύση η εξίσωση A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{0}$ (τη μηδενική) τότε και μόνο όταν rankA = n.

Πρόταση
Ένας $n \times n$ πίνακας A έχει αντίστροφο τότε και μόνο όταν rankA = n.

Ασκήσεις

1) Εξετάστε για τις διάφορες τιμές του λ τις λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x + 3y + \lambda z + w &= 1 \\ x + y + z + w &= \lambda \end{aligned}\right\}.$$

2) Ποια είναι η διάσταση του χώρου των λύσεων του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

3) Δείξτε, χωρίς τη χρήση Θεωρήματος, ότι αν ο πίνακας [A| $\boldsymbol{b}$] είναι κλιμακωτός τότε για να έχει λύση η εξίσωση A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$ πρέπει και αρκεί να ισχύει rankA = rank[A| $\boldsymbol{b}$].

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Θυμίζουμε κατ' αρχάς τον ορισμό της παραγώγου καθώς και ένα σχετικό θεώρημα.

Έστω μία συνάρτηση *f*: [a, b] $\to \mathbb{R}$.
Θα λέμε ότι η *f* είναι παραγωγίσιμη στο *x*, για $x \in$ [a, b], αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

οπότε το όριο το συμβολίζουμε $f'(x)$ και το λέμε παράγωγο της *f* στο *x*.
Αν υπάρχει το $f'(x)$ για κάθε *x* θα λέμε ότι η *f* είναι παραγωγίσιμη.
Στη συνέχεια θα θεωρούμε μόνο συναρτήσεις παραγωγίσιμες.

Ισχύει ο κανόνας της παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Θεώρημα.
Έστω *f*: [*a*, *b*] $\to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Πρόταση
Έστω συνάρτηση $f = f(x)$, τότε "μπορούμε να έχουμε"

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{df}{dx}\Delta x,$$

όταν $(\Delta x)^2 \approx 0$.

Έστω μία συνεχής *f*: [a, b] $\to \mathbb{R}$. Χωρίζουμε το διάστημα [a, b] σε Ν ίσα τμήματα μήκους Δx (άρα Δx = $\frac{b-a}{N}$). Απο κάθε τμήμα παίρνουμε ένα σημείο x_n, $n = 1,2,...N$.

Θέτουμε $S = \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \cdot \Delta x$. Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n \to +\infty} S$ υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός, συμβολίζεται $\int_a^b f(x)dx$ και λέγεται (ορισμένο) ολοκλήρωμα της *f(x)* στο διάστημα [a, b].

Πρόταση

Το $\int_a^b f(x)dx$ ισούται με

το εμβαδόν του χωρίου $\{(x,y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

μείον το εμβαδόν του χωρίου $\{(x,y): a \le x \le b,\ f(x) \le y \le 0\}$.

Θεώρημα

Έστω f: [a, b] $\to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε:

i) Αν θέσουμε F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ για κάθε x $\in$ [a, b], τότε F΄(x) = f(x).

ii) Αν F: [a, b] $\to \mathbb{R}$ με F΄(x) = f(x), τότε $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a).

Αν F: [a, b] $\to \mathbb{R}$ με F'(x) = f(x), τότε θέτουμε $\int f(x)dx = F(x)+c$, όπου c αυθαίρετη σταθερά, και λέμε ότι το (αόριστο) ολοκλήρωμα της f(x) είναι F(x) + c. Το σύνολο των $F(x)+c, c\in\mathbb{R}$, είναι όλες οι συναρτήσεις που η παράγωγός τους δίνει f(x).

Ιδιότητες

Αν f: [a, b] $\to \mathbb{R}$, g: [a, b] $\to \mathbb{R}$ και s, t σταθερές, τότε

$$\int sf(x)+tg(x)dx = s\int f(x)dx + t\int g(x)dx$$

$$\int_a^b sf(x)+tg(x)dx = s\int_a^b f(x)dx + t\int_a^b g(x)dx$$

Πρόταση

i) $\int f'(x)dx = f(x)+c$.

ii) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = \int g(x)dx$.

Πρόταση. (Κανόνες ολοκλήρωσης)

i) $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$, όπου $y = g(x)$, (κανόνας της αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής).
ii) $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$, (κανόνας της κατά μέρη ολοκλήρωσης ή κατά παράγοντες ολοκλήρωσης).

Πίνακας στοιχειωδών ολοκληρωμάτων

$$\int x^{\lambda} dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c, \ (\text{για } \lambda \neq -1 \text{ και } x > 0),$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \ (\text{για } x < 0 \text{ ή για } x > 0),$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + c, \ (\text{για } x < -a \text{ ή για } x > -a),$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Τοξεφ}\, x.$$

Η συνάρτηση $f(x) = \text{Τοξεφ}\, x,\ x \in \mathbb{R}$, ορίζεται ώς εξής:

$$f(x) \in (-\pi/2,\ \pi/2) \text{ έτσι ώστε } \text{εφ}(f(x)) = x.$$

Πρόταση

i) Αν a, b, s, t σταθερές με $s \neq t$ τότε υπάρχουν σταθερές A, B ώστε $\frac{ax+b}{(x-s)(x-t)} = \frac{A}{x-s} + \frac{B}{x-t}$ για κάθε $x \neq s, t$.

ii) Αν a, b, s σταθερές τότε υπάρχουν σταθερές A, B ώστε $\frac{ax+b}{(x-s)^2} = \frac{A}{x-s} + \frac{B}{(x-s)^2}$ για κάθε $x \neq s$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Διαφορική εξίσωση λέμε την εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση με παράγωγό της. Την άγνωστη συνάρτηση θα την συμβολίζουμε y(x) ή απλά y.
Το σύνολο όλων των συναρτήσεων που ικανοποιούν μία διαφορική εξίσωση το λέμε (γενική) λύση της διαφορικής εξίσωσης. Μερική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης λέγεται μια συνάρτηση που την ικανοποιεί.
Θα λέμε ότι μια διαφορική εξίσωση έχει τάξη *κ* όταν η μεγαλύτερη τάξη παραγώγισης που εμφανίζεται στην άγνωστη συνάρτηση είναι *κ*. Εν γένει η γενική λύση μιας εξίσωσης τάξης *κ* εκφράζεται με τη βοήθεια *κ* αυθαίρετων σταθερών.

Παρατήρηση

Μία διαφορική εξίσωση της μορφής $y^{(n)} = f(x)$ (όπου $y^{(n)}$ η *n*-στή παράγωγος της *y* και *f(x)* γνωστή συνάρτηση) λύνεται εύκολα με ολοκληρώσεις, όπως:

$y' = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx$,

$y'' = f(x) \Leftrightarrow y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx$.

Εξετάζουμε τις ακόλουθες κατηγορίες διαφορικών εξιώσεων:

α) Γραμμική 1ης τάξης.

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y' + f(x)y = g(x)$$

όπου f(x), g(x) γνωστές συναρτήσεις, λέγεται γραμμική 1ης τάξης.

Για την λύση της:

Αν $\int f(x)dx = F(x) + c$, τότε πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με $e^{F(x)}$ οπότε έχουμε

$e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = e^{F(x)}g(x)$, ισοδύναμα:

$$(e^{F(x)}y)' = e^{F(x)}g(x) \Leftrightarrow \int (e^{F(x)}y)'dx = \int e^{F(x)}g(x)dx \Leftrightarrow e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x)dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = e^{-F(x)}\int e^{F(x)}g(x)dx.$$

β) <u>Χωριζομένων μεταβλητών.</u>

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$f(y)y' = g(x)$$

όπου f(x), g(x) γνωστές συναρτήσεις, λέγεται διαφορική εξίσωση <u>χωριζομένων μεταβλητών.</u>

Για την λύση της:

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση και παίρνουμε

$$\int f(y)y'dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx\ ,$$

έχοντας κάνει αντικατάσταση της συνάρτησης y με την μεταβλητή y. Μετά την ολοκλήρωση μπορούμε να θεωρούμε και πάλι το y ως συνάρτηση, οπότε έχουμε μια μη διαφορική εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση.

γ) <u>Ομογενείς</u>

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

όπου f γνωστή συνάρτηση, λέγεται <u>ομογενής.</u>

Για την λύση της:

Θέτουμε $\frac{y}{x} = z$. Οπότε y = xz και y΄ =z + xz΄. Συνεπώς, αρκεί να υπολογίσουμε την άγνωστη συνάρτηση z στην διαφορική εξίσωση $z + xz' = f(z) \Leftrightarrow z'\frac{1}{f(z)-z} = \frac{1}{x}$,

όπου z είναι η άγνωστη συνάρτηση σε μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

Αρχικές συνθήκες μιας διαφορικής εξίσωσης λέμε τις επιπλέον συνθήκες που πρέπει να πληρεί η άγνωστη συνάρτηση της διαφορικής εξίσωσης. Οι αρχικές συνθήκες μαζί με την διαφορική εξίσωση προσδιορίζουν εν γένει μία μοναδική συνάρτηση.

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Μια απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$, λέγεται (πραγματική) *συνάρτηση n μεταβλητών*. Θέτουμε $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ την τιμή της f στη θέση $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in X$. Την f θα την συμβολίζουμε και $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Λέμε ότι τα x_i, είναι οι μεταβλητές της $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Αν x είναι μία μεταβλητή της f, τότε με f_x ή $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ συμβολίζουμε την παράγωγο της f ως προς x (εφόσον υπάρχει), θεωρόντας τις άλλες μεταβλητές σταθερές. Λέμε την $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *μερική παράγωγο* της f ως προς x.

Αν x, y είναι μεταβλητές της f, θέτουμε $\dfrac{\partial f_x}{\partial y}$ ή f_{xy} ή $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ την μερική παράγωγο της f_x ως προς x (εφόσον υπάρχει).
Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες ως προς κάθε μεταβλητή.

Πρόταση
Ισχύει ότι $f_{xy} = f_{yx}$.

Λέμε ότι η $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ έχει *τοπικό μέγιστο* (αντίστοιχα: *τοπικό ελάχιστο*) στο σημείο $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ αν $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \leq f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ (αντίστοιχα: $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leq f(x_1, x_2, \ldots x_n)$) όταν $x_1 \approx \xi_1, x_2 \approx \xi_2, \ldots, x_n \approx \xi_n$.

Πρόταση
Τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης $f = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Πρόταση (Κανόνας της αλυσίδας)
Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ και

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots t_m),\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots t_m),\ \ldots,\ x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots t_m).$$

συναρτήσεις που εξαρτούνται από τις μεταβλητές $t_1, t_2, \ldots t_m$.
Οπότε μπορούμε να θεωρούμε $f = f(t_1, t_2, \ldots t_m)$.
Ισχύει ότι $\dfrac{\partial f}{\partial t_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_i} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_i}$,
για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Κλίση της $f = f(x_1, x_2, ... x_n)$ λέμε τη (διανυσματική) συνάρτηση

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

Έστω $f = f(x_1, x_2, ... x_n)$ και $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ με $|\xi| = 1$. *Η παράγωγος της* f *στο σημείο* $(x_1, x_2, ... x_n)$ *κατά την διεύθυνση* $\boldsymbol{\xi}$ ορίζεται το

$$D_\xi f(x_1, x_2, ... x_n) = \left. \frac{df(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, ... x_n + t\xi_n)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Πρόταση

Ισχύει ότι $D_\xi f = \nabla f \cdot \boldsymbol{\xi}$,

δηλ. $D_\xi f(x_1, x_2, ... x_n) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}) \cdot (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\xi_n.$$

Λέμε ότι η $f(x_1, x_2, ... x_n)$ έχει *τοπικό μέγιστο* (αντίστοιχα: *τοπικό ελάχιστο*) στο σημείο $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ αν $f(x_1, x_2, ... x_n) \leq f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ (αντίστοιχα: $f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \leq f(x_1, x_2, ... x_n)$) όταν $x_1 \approx \xi_1, x_2 \approx \xi_2, .., x_n \approx \xi_n$.

Πρόταση

Τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης $f = f(x_1, x_2, ... x_n)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Πρόταση

Μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, ... x_n)$ έχει τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα: ελάχιστο) σε ένα σημείο $(x_1, x_2, ... x_n)$ τότε και μόνο όταν η συνάρτηση

$$g(t) = f(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, ... x_n + t\xi_n), \; t \in \mathbb{R},$$

έχει τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα: ελάχιστο) στο $t = 0$, για κάθε $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \in \mathbb{R}$.

Πρόταση

Έστω $f = f(x_1, x_2, ... x_n)$, τότε

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ... x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, x_2, ... x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n,$$

Η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ είναι πλησιέστερα προς το 0.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ

Ακολουθία λέμε μία απεικόνιση α: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, και συμβολίζουμε $\alpha_n = a(n)$.
Θα λέμε ότι η ακολουθία α_n συγκλίνει στο λ (ή ότι έχει όριο το λ) και θα γράφουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lambda$, ή $\lim a_n = \lambda$, ή $a_n \rightarrow \lambda$.

- για $\lambda \in \mathbb{R}$: αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε $|\alpha_n - \lambda| < \varepsilon$, για κάθε $n > N$,
- για $\lambda = +\infty$: αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε $\alpha_n > \varepsilon$, για κάθε $n > N$,
- για $\lambda = -\infty$: αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε $\alpha_n < -\varepsilon$, για κάθε $n > N$.

Πρόταση

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |\alpha_n| = 0$.

ii) Αν $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ για κάθε n, και $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = \lambda$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \lambda$.

iii) Αν $\alpha_n \leq \beta_n$ για κάθε n, και $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

iv) Αν $\alpha_n \leq \beta_n$ για κάθε n, και $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = -\infty$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = -\infty$.

v) Αν η α_n είναι μονότονη και φραγμένη τότε συγκλίνει σε ένα $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόταση

$$\lim_{n\to\infty} \rho^n = \begin{cases} +\infty, \text{ αν } \rho > 1 \\ 1, \text{ αν } \rho = 1 \\ 0, \text{ αν } |\rho| < 1 \\ \text{δεν συγκλινει, αν } \rho \leq -1 \end{cases}.$$

Πρόταση

Αν f(x), g(x) παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ή $+\infty$ ή $-\infty$,

τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(*Υποθέτουμε ότι το πεδίο ορισμού των f(x), g(x) περιλαμβάνει το* $[1, +\infty)$, $g(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε x, και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$).

Έστω ακολουθία α_n. Θεωρούμε την ακολουθία s_n των μερικών αθροισμάτων της α_n, δηλ. $s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Την ακολουθία αυτή την λέμε σειρά και την συμβολίζουμε $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$.

Με $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συμβολίζουμε και το όριο της σειράς, όταν υπάρχει.

Πρόταση

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n = \begin{cases} +\infty, \text{ αν } \rho \geq 1 \\ \dfrac{\rho}{1-\rho}, \text{ αν } |\rho|<1 \\ \text{δεν υπαρχει, αν } \rho \leq -1 \end{cases}$

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ λέμε ότι <u>συγκλίνει</u> αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόταση

i) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

ii) Αν $a_n \leq b_n \leq d_n$ για κάθε n, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ (όταν αυτά υπάρχουν).