ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εργαστήριο #11

Ονοματεπώνυμο	
Αριθμός Μητρώου	
Τμήμα	

1. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$F(x,y,z) = \left(\sqrt{z}, -2x, \sqrt{y}\right)$$

κατά μήκος της καμπύλης $r : [0,1] \to \mathbb{R}^3, r(t) = (t, t^2, t^4)$.

$1'$. Όμοια για την καμπύλη $q : [0,1] \to \mathbb{R}^3, q(t) = (t, t, t)$.

$1''$. Είναι το παραπάνω διανυσματικό πεδίο F συντηρητικό ;

2. Βρείτε, αν υπάρχει, συνάρτηση δυναμικού για το διανυσματικό πεδίο

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{y}, \frac{1-x^2}{y^2}\right).$$

$2'$. Όμοια για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y) = (4x, e^y)$.

3. Βρείτε, αν υπάρχει, συνάρτηση δυναμικού για το διανυσματικό πεδίο

$$F(x,y,z) = \left(e^x \ln y, \frac{e^x}{y} + \sin z, y\cos z\right).$$

$3'$. Όμοια για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y,z) = (x^2 + y, y^2 + x, ze^z)$.

4. Να υπολογίσετε το έργο του

$$F(x,y,z) = \left(e^x \ln y, \frac{e^x}{y} + \sin z, y\cos z\right)$$

κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος από το σημείο $(0,1,0)$ στο σημείο $(1,1,\pi/2)$.

$4'$. Να υπολογίσετε το έργο του $F(x,y,z) = \left(x^2 + y, y^2 + x, ze^z\right)$ από το σημείο $(-1,3,1)$ στο σημείο $(3,5,0)$ κατά μήκος της καμπύλης

$$r(t) = \left(-1 + t, 3 + \sqrt{t}, 1 - \frac{t}{4}\right), t \in [0,4].$$

1. Υπολογίζουμε $r'(t) = (1, 2t, 4t^3)$ και

$$F\big(r(t)\big) = F\big(t, t^2, t^4\big) = \Big(\sqrt{t^4}, -2t, \sqrt{t^2}\Big) = \big(t^2, -2t, t\big)$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint_r F\,ds &= \int_0^1 F\big(r(t)\big)\cdot r'(t)\,dt = \int_0^1 \big(t^2, -2t, t\big)\cdot\big(1, 2t, 4t^3\big)\,dt \\
&= \int_0^1 \big(t^2 - 4t^2 + 4t^4\big)\,dt = \int_0^1 \big(-3t^2 + 4t^4\big)\,dt \\
&= \left[-t^3 + \frac{4}{5}t^5\right]_{t=0}^{t=1} = -1 + \frac{4}{5} = \mathbf{-1/5}.
\end{aligned}$$

$1'$. Για την καμπύλη $q(t) = (t, t, t)$ υπολογίζουμε $q'(t) = (1, 1, 1)$ και

$$F\big(q(t)\big) = F\big(t, t, t\big) = \Big(\sqrt{t}, -2t, \sqrt{t}\Big)$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint_q F\,ds &= \int_0^1 F\big(q(t)\big)\cdot q'(t)\,dt = \int_0^1 \Big(\sqrt{t}, -2t, \sqrt{t}\Big)\cdot(1, 1, 1)\,dt \\
&= \int_0^1 \Big(2\sqrt{t} - 2t\Big)\,dt = \left[\frac{4}{3}\sqrt{t^3} - t^2\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{4}{3} - 1 = \mathbf{1/3}
\end{aligned}$$

$1''$. Οι καμπύλες r και q έχουν κοινά άκρα (τα σημεία $(0,0,0)$ και $(1,1,1)$). Αφού το ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου F κατά μήκος των καμπυλών r και q είναι διαφορετικό,

$$\oint_r F\,ds = -\frac{1}{5} \neq \frac{1}{3} = \oint_q F\,ds$$

είναι προφανές ότι το ολοκλήρωμα του F δεν είναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Άρα το F δεν είναι συντηρητικό.

Αυτό προκύπτει και από το γεγονός ότι $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} \neq \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\sqrt{z}\Big) = 0 \neq -2 = \frac{\partial}{\partial x}\Big(-2x\Big) = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

2. Για την ύπαρξη συνάρτησης δυναμικού ελέγχουμε εάν ισχύει η σχέση $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y}\right) = -\frac{2x}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-x^2}{y^2}\right) = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης $f(x, y)$ έτσι ώστε

$$F(x, y) = \nabla f \;\; \text{δηλαδή} \;\; \left(\frac{2x}{y}, \frac{1-x^2}{y^2}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \Longrightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{y} + g(y)$$

και

$$\frac{1-x^2}{y^2} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y} + g(y)\right) = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{d}{dy}g(y).$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $\dfrac{dg}{dy} = \dfrac{1}{y^2}$ και άρα $g(y) = -\dfrac{1}{y}$.

Τελικά έχουμε $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{1}{y}$.

$2'$. Αφού ισχύει $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(2x\Big) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\Big(e^y\Big) = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

υπάρχει συνάρτηση δυναμικού για το $F(x,y) = (4x, e^y)$.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης $f(x,y)$ έτσι ώστε

$$F(x,y) = \nabla f \ \text{ δηλαδή } \ (4x, e^y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x \Longrightarrow f(x,y) = 2x^2 + g(y)$$

και

$$e^y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(2x^2 + g(y)\big) = 0 + \frac{d}{dy}g(y).$$

Αρα $\dfrac{dg}{dy} = e^y \implies g(y) = e^y$.

Τελικά έχουμε $f(x,y) = 2x^2 + e^y$.

3. Εκτελώντας τις μερικές παραγωγίσεις ελέγχουμε ότι οι ισότητες

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

ισχύουν για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y,z) = \left(e^x \ln y, \dfrac{e^x}{y} + \sin z, y\cos z\right)$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(e^x \ln y\Big) = \frac{e^x}{y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^x}{y} + \sin z\right) = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(e^x \ln y\Big) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\big(y\cos z\big) = \frac{\partial F_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^x}{y} + \sin z\right) = \cos z = \frac{\partial}{\partial y}\Big(y\cos z\Big) = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Συνεπώς υπάρχει συνάρτηση δυναμικού και για τον υπολογισμό της συνάρτησης $f(x,y,z)$ έτσι ώστε

$$F(x,y,z) = \nabla f \ \text{ δηλαδή } \ \left(e^x \ln y, \frac{e^x}{y} + \sin z, y\cos z\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \ln y \Longrightarrow f(x,y,z) = e^x \ln y + g(y,z) \tag{1}$$

και

$$\frac{e^x}{y} + \sin z = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(e^x \ln y + g(y,z)\Big) = \frac{e^x}{y} + \frac{\partial}{\partial y} g(y,z).$$

Αρα $\dfrac{\partial}{\partial y} g(y,z) = \sin z \implies g(y,z) = y\sin z + h(z)$ και η σχέση (1) γίνεται

$$f(x,y,z) = e^x \ln y + g(y,z) = e^x \ln y + y \sin z + h(z).$$

Τέλος, υπολογίζουμε την $h(z)$ ως εξής:

$$y \cos z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(e^x \ln y + y \sin z + h(z)\Big) = 0 + y\cos z + \frac{d}{dz} h(z).$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\dfrac{dh}{dz} = 0$ συνεπώς $h(z) = C, C \in \mathbb{R}$.
Τελικά έχουμε $f(x,y,z) = e^x \ln y + y \sin z + C$.

$3'$. Εκτελώντας τις μερικές παραγωγίσεις ελέγχουμε ότι οι ισότητες

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

ισχύουν για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y,z) = \big(x^2 + y, y^2 + x, ze^z\big)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2{+}y\Big) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}\Big(y^2{+}x\Big), \ \frac{\partial}{\partial z}\Big(x^2{+}y\Big) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\Big(ze^z\Big), \ \frac{\partial}{\partial z}\Big(y^2{+}x\Big) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}\Big(ze^z\Big).$$

Συνεπώς υπάρχει συνάρτηση δυναμικού και για τον υπολογισμό της συνάρτησης $f(x,y,z)$ έτσι ώστε

$$F(x,y,z) = \nabla f \ \ \text{δηλαδή} \ \ \big(x^2 + y, y^2 + x, ze^z\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \Longrightarrow f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + yx + g(y,z) \tag{2}$$

και

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x^3}{3} + yx + g(y,z)\Big) = 0 + x + \frac{\partial}{\partial y} g(y,z).$$

Αρα $\dfrac{\partial}{\partial y} g(y,z) = y^2 \implies g(y,z) = y^3/3 + h(z)$ και η σχέση (2) γίνεται

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + yx + g(y,z) = \frac{x^3}{3} + yx + \frac{y^3}{3} + h(z).$$

Τέλος, υπολογίζουμε την $h(z)$ ως εξής:

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + yx + \frac{y^3}{3} + h(z)\right) = 0 + 0 + 0 + \frac{d}{dz} h(z).$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\dfrac{dh}{dz} = ze^z$ και με στοιχειώδη ολοκλήρωση βρίκσουμε $h(z) = \int ze^z \, dz = (z-1)e^z$.

Τελικά έχουμε $f(x,y,z) = \dfrac{x^3}{3} + yx + \dfrac{y^3}{3} + (z-1)e^z$.

4. Στην άσκηση 3 βρήκαμε ότι η $f(x,y,z) = e^x \ln y + y \sin z + C$ είναι συνάρτηση δυναμικού για το διανυσματικό πεδίο

$$F(x,y,z) = \left(e^x \ln y, \frac{e^x}{y} + \sin z, y \cos z \right).$$

Άρα το ολοκληρωμα του F κατά μήκος μιας οιασδήποτε καμπύλης εξερτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης και συγκεκριμένα

$$\oint F\, ds = f(1,1,\pi/2) - f(0,1,0) = \left(e \ln 1 + 1 \sin \frac{\pi}{2} \right) - (e^0 \ln 1 + 1 \sin 0) = 1 - 0 = 1$$

4′. Στην άσκηση 3′ βρήκαμε ότι η $f(x,y,z) = \dfrac{x^3}{3} + yx + \dfrac{y^3}{3} + (z-1)e^z$ είναι συνάρτηση δυναμικού για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y,z) = (x^2 + y, y^2 + x, ze^z)$.

Άρα το ολοκληρωμα του F κατά μήκος μιας οιασδήποτε καμπύλης εξερτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης και συγκεκριμένα

$$\oint_r F\, ds = f(3,5,0) - f(-1,3,1) = \left(\frac{3^3}{3} + 15 + \frac{5^3}{3} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 3 + 9 + 0 \right) = 59.$$