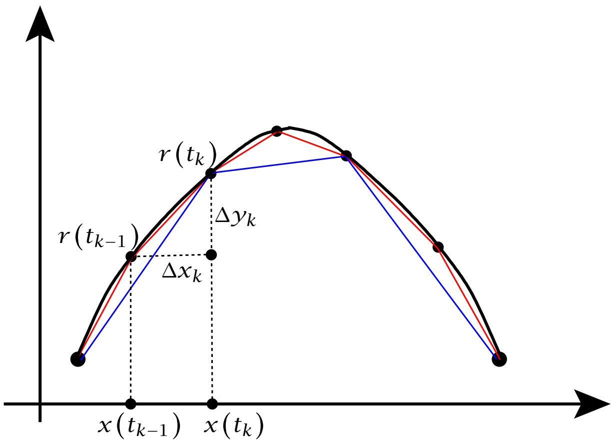
Κεφάλαιο #6

Ολοκληρωμα Κατα Μηκος Κμπυλης

Μηκος Καμπυλης

Ο πιο απλός τρόπος για να προσεγγίσουμε το μήκος μιας καμπύλης είναι να την προσεγγίσουμε με πολυγωνικές γραμμές που έχουν κορυφές επί της καμπύλης, των οποίων το μήκος, κατά τεκμήριο, είναι πιο εύκολο να υπολογισθεί.



Προφανώς όσο πιο πολλές κορυφές έχει η πολυγωνική γραμμή τόσο περισσότερο το μήκος της πολυγωνικής προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης. Δείτε στο διπλανό σχήμα την μπλε και την κόκκινη πολυγωνική γραμμή.

Έστω $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2, r(t) = (x(t), y(t))$ μια διαφορίσιμη καμπύλη. Διαμερίζουμε το πεδίο ορισμού $[a,b]$ της καμπύλης σε n πλήθος υποδιαστήματα $[t_{k-1}, t_k], k = 1,\dots,n$ με $t_0 = a, t_n = b$. Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{r(t_{k-1})\, r(t_k)}$ που προσεγγίζει το μήκος του υποτόξου της καμπύλης $\widehat{r(t_{k-1}) r(t_k)}$ με άκρα τα σημεία $r(t_{k-1})$ και $r(t_k)$ είναι $\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$ και το μήκος της πολυγωνικής γραμμής είναι

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2} \tag{1}$$

Εάν το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ υπάρχει, τότε με βάση τα παραπάνω το όριο αυτό θα είναι το μήκος της καμπύλης $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Για τον υπολογισμό αυτού του ορίου παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}$ προσεγγίζει την παράγωγο $y'(t)$ όταν $n \to \infty$ και η ποσότητα $\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}$ προσεγγίζει την παράγωγο $x'(t)$. Συνεπώς το δεξιά μέλος της σχέσης (1) είναι άθροισμα ολοκλήρωσης της συνάρτησης $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

Ορισμός: Το μήκος $L(r)$ μιας διαφορίσιμης καμπύλης $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2, r(t) =$

$(x(t), y(t))$ όπου η καμπύλη $r(t)$ διατρέχει την εικόνα της μία φορά καθώς το $t \in [a,b]$ είναι

$$L(r) := \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Ισοδύναμα, $L(r) := \int_a^b |r'(t)|\, dt$ όπου $|r'(t)|$ είναι το μέτρο του εφαπτομένου διανύσματος.

Πανομοιότυπα έχουμε τον ορισμό του μήκους μιας καμπύλης στον τρισδιάστατο χώρο

$$r : [a,b] \to \mathbb{R}^3, r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

ως εξής

$$L(r) := \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt = \int_a^b |r'(t)|\, dt.$$

Παράδειγμα: Έστω C ο κύκλος ακτίνας ρ. Για να υπολογίσουμε το μήκος της περιφέρειάς του χρειαζόμαστε μια παραμέτρηση.

> Σημείωση: Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα στον παραπάνω ορισμό δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της καμπύλης.

Επιλέγουμε για κέντρο του κύκλου C το $(0,0)$ και την παραμέτρηση του Παραδείγματος 2 του Κεφαλαίου 2

$$r(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

και έχουμε

$$L(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho \cos'(t))^2 + (\rho \sin'(t))^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2}\, dt = \rho \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi\rho.$$

Παράδειγμα: Το μήκος της καμπύλης $\sigma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{2} t^{\frac{3}{2}}, t\right), t \in [1,2]$ είναι: Το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$|\sigma'(t)| = \left|\left(t, \sqrt{2t}, 1\right)\right| = \sqrt{t^2 + 2t + 1} = |t+1| = t + 1.$$

και

$$L(\sigma) = \int_1^2 (t+1)\, dt = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{t=1}^{t=2} = 2 + 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{2}.$$

Ολοκληρωση Συναρτησης επι μιας Καμπυλης

Έστω $f(x,y,z)$ πραγματική συνεχής συνάρτηση με το πεδίο ορισμού της f να περιέχει την καμπύλη $r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b]$ και οι συνιστώσες συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ να έχουν συνεχείς παραγώγους.

Διαμερίζουμε την εικόνα της καμπύλης $C = r([a,b])$ σε n το πλήθος τόξα $s_i, i = 1, \ldots, n$ με μήκος Δs_i. Επιλέγουμε τυχαίο σημείο (x_i, y_i, z_i) στο τόξο s_i και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i.$$

Αποδεικνύεται ότι όταν $n \to \infty$, ισοδύναμα, $\Delta s_i \to 0$, τότε το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ υπάρχει και το **ορίζουμε ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της** $f(x,y,z)$ **επί της καμπύλης** r και συμβολίζεται με

$$\int_r f\ ds.$$

Στην βιβλιογραφία το ολοκλήρωμα μιας πραγματικής συνάρτησης κατά μήκος μιας καμπύλης συχνά αναφέρεται ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1ου είδους. Για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε το παρακάτω

Θεώρημα: $\displaystyle\int_r f\ ds = \int_a^b f\Big(r(t)\Big)\ |r'(t)|\ \ dt.$

Ιδιότητες: 1) Αποδεικνύεται ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_r f\ ds$ δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της καμπύλης r.
2) Αν η καμπύλη r είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους καμπυλών $r_1, r_2, \ldots, r_k$ τότε

$$\int_r f\ ds = \int_{r_1} f\ ds + \int_{r_2} f\ ds + \cdots + \int_{r_k} f\ ds$$

Παράδειγμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος της $f(x,y,z) = xy + y + z$ κατά μήκος της καμπύλης $r(t) = (2t, t, 2-2t), t \in [0,1]$.
Έχουμε $f(r(t)) = f\Big(2t, t, 2-2t\Big) = 2tt + t + (2-2t) = 2t^2 - t + 2$
και $r'(t) = (2, 1, -2) \Longrightarrow |r'(t)| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$, οπότε

$$\int_r f\ ds = \int_0^1 \Big(t^2 - t + 2\Big)\, 3\ dt = 3\left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{t^2}{2} + 2t\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{13}{2}.$$

Παράδειγμα: Υπολογισμός του ολοκληρώματος της $f(x,y,z) = x + y + z$ κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος από το σημείο $(1,2,3)$ στο σημείο $(0,-1,1)$.
Μια παραμέτρηση του δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος (δες Κεφάλαιο 2) είναι

$$r(t) = (1-t)(1,2,3) + t(0,-1,1) = (1-t, 2-3t, 3-2t), t \in [0,1].$$

Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας

$$r'(t) = (-1, -3, -2) \Longrightarrow |r'(t)| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_r f\ ds &= \int_0^1 f\Big(r(t)\Big)\ |r'(t)|\ \ dt = \int_0^1 f\Big((1-t), (2-3t), (3-2t)\Big)\sqrt{14}\ dt\\ &= \int_0^1 \Big((1-t) + (2-3t) + (3-2t)\Big)\sqrt{14}\ dt = \sqrt{14}\int_0^1 \Big(6t - 3t^2\Big)\ dt = 3\sqrt{14}.\end{aligned}$$

Εφαρμογή: Μάζα σύρματος

Το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει, μεταξύ άλλων, μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή στην Φυσική. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα συρμάτινο ευθύγραμμο νήμα C στον χώρο με άκρα τα σημεία A και B και σταθερή πυκνότητα $\delta\,\mathrm{gr/cm^3}$. Τότε η ολική μάζα του σύρματος ισούται με το γινόμενο

$$|AB|\ \delta$$

όπου $|AB|$ είναι το μήκος του σύρματος.

Αν όμως η καμπύλη C δεν είναι ευθύγραμμη και η πυκνότητα δεν είναι σταθερή αλλά δίνεται από μία συνάρτηση $f(x, y, z)$ στο σημείο (x, y, z) της καμπύλης, τότε η μάζα του σύρματος δίδεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x, y, z)$ επί της C. Συγκεκριμένα, αν $r(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big), t \in [a, b]$ είναι μια παραμέτρηση της C τότε η ολική μάζα m του συρμάτινου νήματος είναι

$$m = \int_C f\ ds = \int_a^b f\Big(r(t)\Big)\ |r'(t)|\ \ dt$$

Παράδειγμα: Ένα νήμα πυκνότητας $\delta(x, y, z) = 15\sqrt{y+2}$ κείται κατά μήκος της καμπύλης $r(t) = \Big(0, t^2 - 1, 2t\Big)t \in [-1, 1]$. Η μάζα του νήματος είναι

$$m = \int_r \delta\ ds = \int_{-1}^1 \delta\Big(r(t)\Big)\ |r'(t)|\ \ dt$$

Υπολογίζουμε $r'(t) = (0, 2t, 2) \Longrightarrow |r'(t)| = 2\sqrt{t^2+1}$ και
$\delta\Big(r(t)\Big) = \delta\Big(0, t^2 - 1, 2t\Big) = 15\sqrt{t^2 - 1 + 2}$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}m = \int_{-1}^1 \delta\Big(r(t)\Big)\ |r'(t)|\ \ dt &= \int_{-1}^1 \Big(15\sqrt{t^2-1+2}\Big)\Big(2\sqrt{t^2+1}\Big)\ dt\\ &= \int_{-1}^1 30\Big(t^2+1\Big)\ dt = 80.\end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Βρείτε το μήκος της καμπύλης $\sigma(t) = \left(t^3 + \frac{3t^2}{2}\right), t \in [0, \sqrt{3}]$.

$$\left[\text{Απ: } \int_0^{\sqrt{3}} \left(3t\sqrt{t^2+1}\right)\, dt = 7\right]$$

2. Βρείτε το μήκος του γραφήματος της συνάρτησης

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} - 1$$

   από το σημείο $(0,-1)$ μέχρι το σημείο $\left(1, \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1\right)$.

$$\left[\text{Απ: } \int_0^1 \sqrt{1+8x}\, dx = 7\right]$$

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(x,y) = \frac{x^3}{y}$ κατά μήκος του γραφήματος της συνάρτησης $y = \frac{x^2}{2}$ από το σημείο $(0,0)$ μέχρι το σημείο $(2,2)$.

$$\left[\text{Απ: } \int_0^1 \frac{2t^3}{t^2}\sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{10\sqrt{5}-2}{3}\right]$$

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ κατά μήκος της καμπύλης r που αποτελείται από την ένωση της καμπύλης $r_1(t) = \left(t, t^2, 0\right), t \in [0,1]$ και του ευθυγράμμου τμήματος r_2 με άκρα τα σημεία $(1,1,0)$ και $(1,1,1)$.

$$\left[\text{Απ: } \int_0^1 (2t)\sqrt{1+4t^2}\, dt + \int_0^1 \left(2t^2\right)1\, dt = \frac{5\sqrt{5}+9}{6}\right]$$