Συνοπτικές Σημειώσεις **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

Κεφάλαιο #5

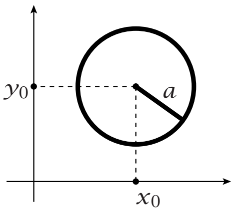
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΓΚΩΝ – ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1 Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

Γνωρίζουμε από την στοιχειώδη δι-διάστατη Γεωμετρία τις παρακάτω βασικές κατηγορίες καμπυλών που ορίζονται ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ικανοποιούν μια εξίσωση δευτέρου βαθμού:

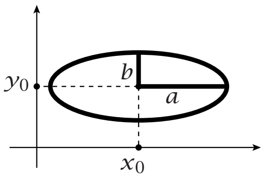
Κύκλος: κέντρου (x_0, y_0) ακτίνας $a > 0$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$



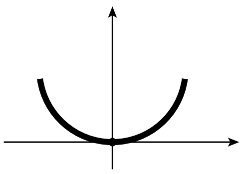
Έλλειψη: με άξονες $a > b > 0$

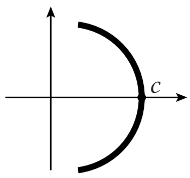
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



Παραβολή: $y = ax^2, a > 0$

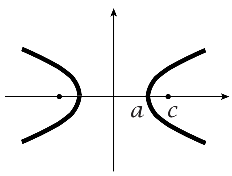
και $x = by^2 + c, b < 0$

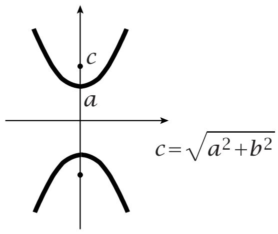




Υπερβολή: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$

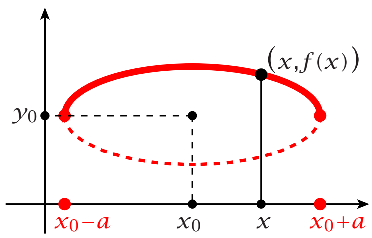
και $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$





Τα σημεία που ανήκουν στις παραπάνω βασικές καμπύλες μπορούν να περιγραφούν ως τα γραφήματα κατάλληλων συναρτήσεων $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, το άνω τμήμα της έλλειψης $(y \geq y_0)$ είναι το γράφημα της συνάρτησης:

$$f : [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}} + y_0$$



ενώ το κάτω τμήμα του κύκλου ($y \le y_0$) είναι το γράφημα της

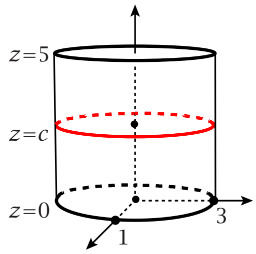
$$f : [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} + y_0$$

Κάθε μία από τις παραπάνω καμπύλες ορίζει μια κυλινδρικού τύπου επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ ως εξής: αν K είναι μία καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ (κύκλος, έλλειψη κλπ) τότε

$$S(K) := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x, y) \in K, z \in \mathbb{R}\right\} \tag{1}$$

είναι μια διδιάστατη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Για παράδειγμα, αν K είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ τότε η επιφάνεια

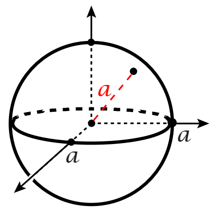
$$S(K) := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1, 0 \le z \le 5\right\}$$

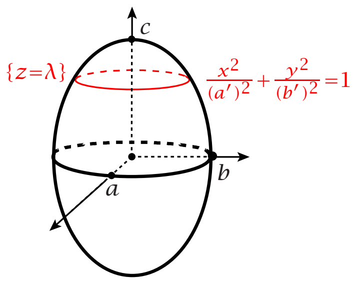


είναι ο (ελλειπτικός) κύλινδρος με βάση την έλλειψη $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ και ύψος 5.

Αντίστοιχα με τις καμπύλες στο $\mathbb{R}^2$ έχουμε ότι το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν εξισώσεις δευτέρου βαθμού[1] με 3 μεταβλητές x, y, z ορίζουν επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$. Οι βασικότερες εξ αυτών, που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια, είναι:

<u>Σφαίρα</u> ακτίνας $a > 0$: $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = a^2\right\}$



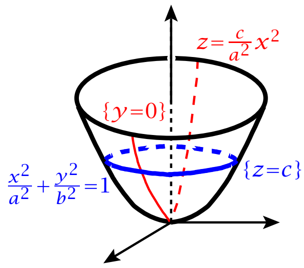


<u>Ελλειψοειδές:</u> $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$

Η τομή του ελλειψοειδούς με το επίπεδο $\{z = \lambda\}$, $\lambda \in [0, c]$ είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$ με $a' = \frac{a(c-\lambda)}{c}$ και $b' = \frac{b(c-\lambda)}{c}$.

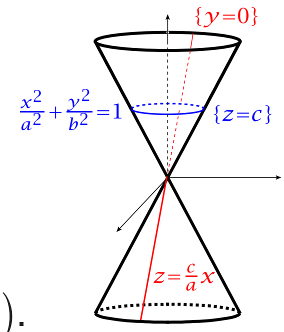
[1]Γνωρίζουμε από τα ΜΑΘ Α ότι οι εξισώσεις πρώτου βαθμού με 3 μεταβλητές, $ax + by + cz = d$, ορίζουν επίπεδα στον $\mathbb{R}^3$.

<u>Παραβολοειδές:</u> $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}\right\}$

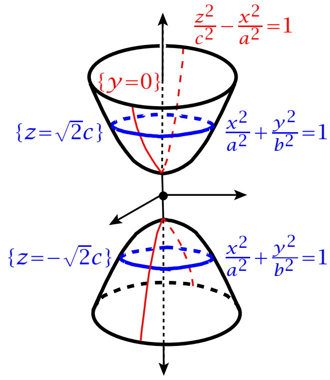


Η τομή του παραβολοειδούς με το επίπεδο $\{z=c\}$ είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ και η τομή του με κάθε επίπεδο που περιέχει το z-άξονα είναι παραβολή (π.χ η τομή με το επίπεδο $y=0$ είναι $z=\frac{c}{a^2}x^2\big)$.

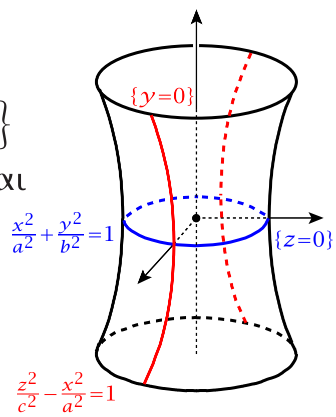
<u>Κώνος:</u> $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\right\}$
Η τομή του κώνου με το επίπεδο $\{z=c\}$ είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ και η τομή του με κάθε επίπεδο που περιέχει το z-άξονα είναι ευθεία (π.χ η τομή με το επίπεδο $y=0$ είναι η ευθεία $z=\frac{c}{a}x\big)$.



<u>Υπερβολοειδές:</u> $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$
Η τομή του υπερβολοειδούς με το επίπεδο $\{z=\sqrt{2}c\}$ είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ και η τομή του με κάθε επίπεδο που περιέχει το z-άξονα είναι υπερβολή (π.χ η τομή με το επίπεδο $y=0$ είναι η υπερβολή $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\big)$.



<u>(Μονό) Υπερβολοειδές:</u> $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\right\}$
Η τομή του υπερβολοειδούς με το επίπεδο $\{z=0\}$ είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ και η τομή του με κάθε επίπεδο που περιέχει το z-άξονα είναι υπερβολή. (π.χ η τομή με το επίπεδο $y=0$ είναι η υπερβολή $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\big)$.



Παρόμοια με την περίπτωση των καμπυλών, τα σημεία που ανήκουν στις παραπάνω επιφάνειες μπορούν να περιγραφούν ως τα γραφήματα κατάλληλων συναρτήσεων δύο μεταβλητών $f:R\to\mathbb{R}$, όπου R κατάλληλο χωρίο στο $\mathbb{R}^2$. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

- Το κάτω τμήμα ($z \leq 0$) της σφαίρας $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1\right\}$ ακτίνας a είναι το γράφημα της συνάρτησης

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι ο δίσκος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας a.

- Για να εκφράσουμε ως γράφημα συνάρτησης το τμήμα του υπερβολοειδούς $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ που φράσσεται από τα επίπεδα $z = 1$ και $z = 3$, βρίσκουμε πρώτα τις τομές του υπερβολοειδούς με τα δύο αυτά επίπεδα:
Για $z = 1$, τα x, y ικανοποιούν την σχέση $x^2 + y^2 = 0$ άρα $x = y = 0$. Συνεπώς η τομή του επιπέδου $z = 1$ με το υπερβολοειδές $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ είναι το σημείο $(0,0,1)$. Παρόμοια βρίσκουμε ότι η τομή με το επίπεδο $z = 3$ είναι τα σημεία $(x,y,3)$ που ανήκουν στο υπερβολοειδές, άρα ικανοποιούν την σχέση

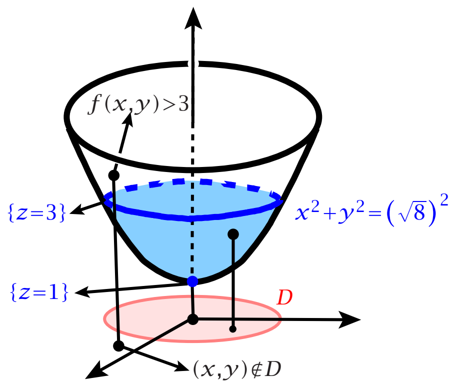
$$3^2 - x^2 - y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = 8.$$

Άρα η τομή με το επίπεδο $z = 3$ είναι

$$\left\{(x,y,3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2\right\}.$$

Παραλείποντας την συντεταγμένη $z = 3$, (ακριβέστερα, προβάλλοντας στο xy-επίπεδο) έχουμε το δίσκο D κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{8}$ και παρατηρούμε ότι αν (x,y,z) είναι σημείο του υπερβολοειδούς με $z > 0$ τότε

$$\begin{aligned}
(x,y) \in D \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 8 \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 \leq \sqrt{x^2+y^2+1} \leq 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad z \in [1,3]
\end{aligned}$$



Συνεπώς, το γράφημα της συνάρτησης

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$$

ταυτίζεται με το σύνολο των σημείων του υπερβολοειδούς που έχουν την z-συντεταγμένη μεταξύ 1 και 3, δηλαδή βρίσκονται μεταξύ των επιπέδων $z = 1$ και $z = 3$.

2 Όγκος ως διπλό Ολοκλήρωμα

Γνωρίζουμε από τον Λογισμό πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής ότι αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική συνάρτηση, δηλαδή, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται (άνω) από το γράφημα της f και (κάτω) από τον x-άξονα.

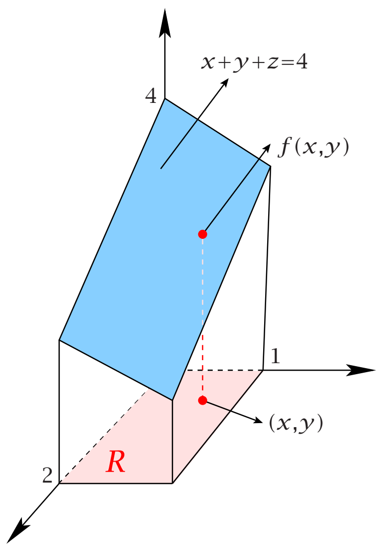
Πανομοιότυπη είναι η κατάσταση με τα διπλά ολοκληρώματα συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Συγκεκριμένα, έστω R χωρίο στο $\mathbb{R}^2$ και συνάρτηση

$$f : R \to \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) \geq 0 \text{ για κάθε } (x, y) \in R.$$

Αν Q είναι το στερεό (τρισδιάστατο χωρίο) που φράσσεται άνω από το γράφημα της f και κάτω από το xy-επίπεδο, τότε ο όγκος $V(Q)$ του Q είναι

$$V(Q) = \iint_R f(x, y)dA \tag{2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 *Υπολογίζουμε τον όγκο του στερεού Q που φράσσεται πάνω από το επίπεδο $x + y + z = 4$ και κάτω από το ορθογώνιο $R = [0, 2] \times [0, 1]$ του xy-επιπέδου.*



Εξυπακούεται, αν δεν αναφέρεται κάτι άλλο, ότι τα πλευρικά φράγματα του στερεού Q είναι τα κατακόρυφα επίπεδα που καθορίζουν οι πλευρές του ορθογωνίου R, εν προκειμένω, τα επίπεδα $x = 2, y = 1, x = 0$ και $y = 0$.

Λύνοντας την εξίσωση του επιπέδου $x + y + z = 4$ ως προς z, έχουμε ότι η συνάρτηση

$$f : [0, 2] \times [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = 4 - x - y$$

έχει γράφημα ακριβώς το τμήμα του επιπέδου $x + y + z = 4$ που βρίσκεται *πάνω από το R (με μπλε σκίαση στο σχήμα). Από τον τύπο (2) έχουμε*

$$\begin{aligned} V(Q) &= \iint_R \Big(4 - x - y\Big)\, dA = \int_0^2 \int_0^1 \Big(4 - x - y\Big)\, dy dx \\ &= \int_0^2 \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \Big(4 - x - \frac{1}{2}\Big)\, dx \\ &= \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{14}{2} - \frac{4}{2} = 5. \end{aligned}$$

Γενικότερα, αν ένα στερεό Q φράσσεται από τα γραφήματα δύο συναρτήσεων

$$g_1, g_2 : R \to \mathbb{R} \text{ με } g_1(x,y) \le g_2(x,y) \text{ για κάθε } (x,y) \in R$$

δηλαδή,

$$Q = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; (x,y) \in R \text{ και } g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\Big\}$$

τότε ο όγκος του δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$V(Q) = \iint_R \left[g_2(x,y) - g_1(x,y)\right] dA \tag{3}$$

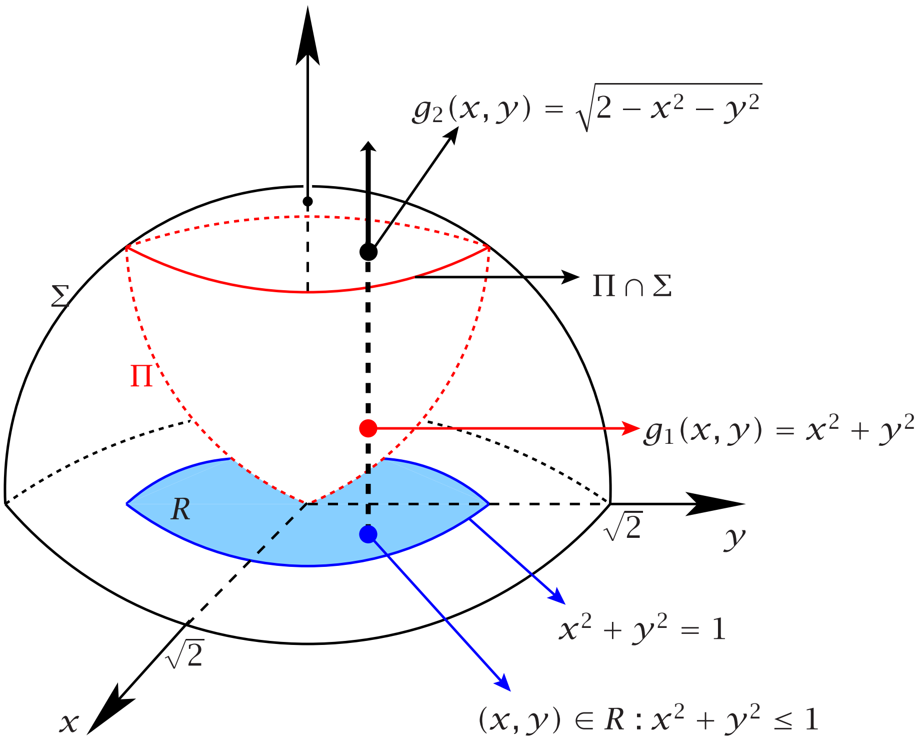
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 *Υπολογίζουμε τον όγκο του στερεού Q που φράσσεται πάνω από την σφαίρα Σ και κάτω από το παραβολοειδές Π όπου*

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \text{ και } \Pi : x^2 + y^2 = z.$$

Βρίσκουμε πρώτα σε ποια σημεία τέμνονται οι δύο επιφάνειες που μας δίνονται:

$$\left\{ \begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ x^2 + y^2 = z \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} z^2 + z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = z \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} z = 1, -2 \\ x^2 + y^2 = z \end{array} \right\}$$

και αφού $z \ge 0$ έχουμε ότι η τομή της σφαίρας και του παραβολοειδούς είναι η καμπύλη $x^2 + y^2 = z = 1$ (κύκλος ακτίνας 1) στο επίπεδο $z = 1$.



Η προβολή της τομής $\Pi \cap \Sigma$ *στο* xy*-επίπεδο οριοθετεί το πεδίο ορισμού των* g_1, g_2 *που είναι ο δίσκος* $R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. *Από τις εξισώσεις που ικανοποιούν οι δοσμένες επιφάνειες βρίσκουμε άμεσα (λύνοντας ως προς z) τις συναρτήσεις των οποίων την διαφορά θα ολοκληρώσουμε:*

$$g_1(x,y) = x^2+y^2 \;\; \textit{και} \;\; g_2(x,y) = \sqrt{2-x^2-y^2}.$$

Για τα σημεία $(x,y) \in R$, *όπως φαίνεται και στο σχήμα, το παραβολοειδές βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας, άρα πρέπει να ισχύει ότι* $g_1(x,y) \leq g_2(x,y)$. *Όντως,*

$$x^2+y^2 \leq 1 \Longrightarrow 2-x^2-y^2 \geq 2-1 \Longrightarrow \sqrt{2-x^2-y^2} \geq 1 \geq x^2+y^2.$$

Από τον τύπο (3) έχουμε

$$V(Q) = \iint_R \left(\sqrt{2-x^2-y^2} - x^2 - y^2\right) dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\sqrt{2-x^2-y^2} - x^2 - y^2\right) dx dy$$

Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες για τον δίσκο

$$R = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\right\} = \left\{(r,\theta) \mid r \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]\right\}$$

και με χρήση των μετασχηματισμών $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ *έχουμε*

$$\begin{aligned} V(Q) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{2-r^2} - r^2\right) r\,dr\,d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right)\left(\int_0^1 \left(r\sqrt{2-r^2} - r^3\right) dr\right) \\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = 2\pi\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2} - \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

3 Όγκος ως τριπλό ολοκλήρωμα

Ο ορισμός των ολοκληρωμάτων που έχουμε δει μέχρι τώρα βασίζεται στην διαδικασία της διαμέρισης:

- των διαστημάτων σε υπο-διαστήματα για την περίπτωση της μιας μεταβλητής (απλό ολοκλήρωμα), και
- των φραγμένων χωρίων σε μικρά ορθογώνια στο $\mathbb{R}^2$ για την περίπτωση των δύο μεταβλητών (διπλό ολοκλήρωμα).

Στις 3 διαστάσεις, δηλαδή για φραγμένα στερεά B στον $\mathbb{R}^3$, η ίδιας λογικής διαδικασία διαμέρισης του στερεού σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα οδηγεί στο ορισμό του τριπλού ολοκληρώματος μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών $f(x,y,z)$ επί του B

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV$$

για το οποίο ισχύουν όλες οι αντίστοιχες ιδιότητες που αναφέρθηκαν στην αρχή του Κεφαλαίου 4 για τα διπλά ολοκληρώματα. Στο μάθημά μας θα ασχοληθούμε μόνο με το τριπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης $f(x,y,z) = 1$ για την οποία ισχύει ότι το (τριπλό) ολοκλήρωμά της ισούται με τον όγκο του B:

$$V(B) = \iiint_B 1\,dV$$

Όπως το Θεώρημα Fubini επιτρέπει τον υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων με διαδοχική εκτέλεση δύο απλών (δηλ. ως προς μία μεταβλητή) ολοκληρωμάτων, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ο υπολογισμός των τριπλών ολοκληρωμάτων γίνεται με διαδοχική εκτέλεση τριών απλών (δηλ. μιας μεταβλητής) ολοκληρωμάτων

$$V(B) = \iiint_B 1\,dV = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} dz\,dy\,dx. \tag{4}$$

Τα όρια ολοκλήρωσης, δηλαδή οι συναρτήσεις f_1, f_2, g_1, g_2 και τα $a, b \in \mathbb{R}$ εξαρτώνται από τις επιφάνειες που φράσσουν το στερεό B και βρίσκονται ως εξής:

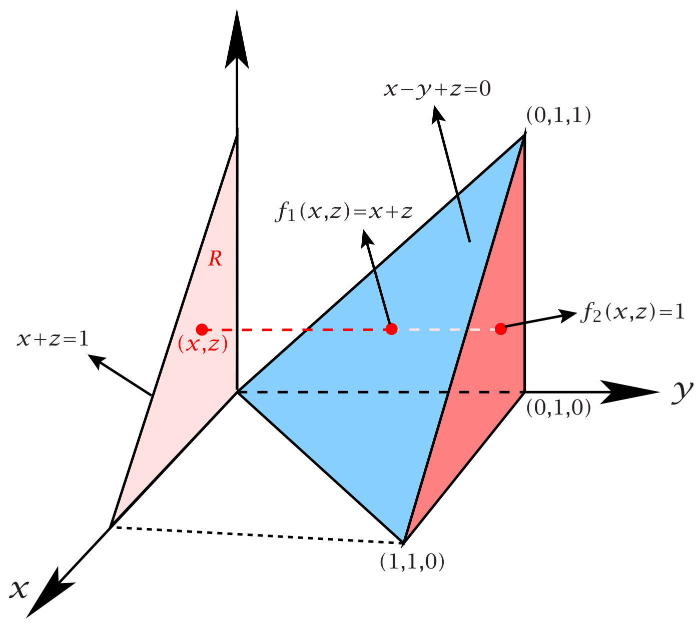
- η προβολή του στερεού B στο xy-επίπεδο καθορίζει διδιάστατο χωρίο R το οποίο με την σειρά του προσδιορίζει τα όρια
$$a \le x \le b \text{ και } g_1(x) \le y \le g_2(x).$$

- Για κάθε σημείο $(x, y) \in R$ θεωρούμε ευθεία E που το περιέχει και είναι κάθετη στο xy-επίπεδο. Οι τιμές του z που αντιστοιχούν στα σημεία εισόδου και εξόδου της E από το στερεό είναι συναρτήσεις $z = f_1(x, y)$ και $z = f_2(x, y)$ ως προς x, y και είναι τα όρια ολοκλήρωσης ως προς z.

Ανάλογη είναι η διαδικασία αν επιλέξουμε διαφορετική σειρά ολοκλήρωσης. Φερ΄ ειπείν, για την σειρά $dxdzdy$ προβάλουμε στο yz-επίπεδο και θεωρούμε ευθείες κάθετες σε αυτό

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_{y=a}^{y=b} \int_{z=g_1(y)}^{z=g_2(y)} \int_{x=f_1(y,z)}^{x=f_2(y,z)} dxdzdy.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 *Υπολογισμός του όγκου του τετραέδρου T με κορυφές τα σημεία* $(0,0,0), (1,1,0), (0,1,0)$ *και* $(0,1,1)$.



Τα 4 επίπεδα (έδρες) του τετραέδρου είναι:

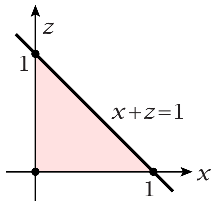
$$\left| \begin{array}{l} z = 0 \;:\; \textit{περιέχει } (0,0,\mathbf{0}), (1,1,\mathbf{0}), (0,1,\mathbf{0}) \\ x = 0 \;:\; \textit{περιέχει } (\mathbf{0},0,0), (\mathbf{0},1,1), (\mathbf{0},1,0) \\ y = 1 \;:\; \textit{περιέχει } (1,\mathbf{1},0), (0,\mathbf{1},1), (0,\mathbf{1},0) \end{array} \right|$$

και η 3*-άδα* $(0,0,0),(1,1,0),(0,1,1)$ *ορίζει το επίπεδο*

$$x-y+z=0$$

(το βρίσκουμε αντικαθιστώντας στην γενική εξίσωση $ax+by+cz=d$ *τις τιμές των σημείων και λύνουμε ως προς* a,b,c,d*). Θα χρησιμοποιήσουμε την σειρά ολοκλήρωσης* $dydzdx$*. Η προβολή στο* xz*-επίπεδο καθορίζει το χωρίο* R *και συνακόλουθα τα όρια ολοκλήρωσης ως προς* z *και* x*:*

$$R=\Big\{(x,z)\ \Big|\ x+z\le 1 \text{ και } x,z\ge 0\Big\}$$



$$\left\{\begin{array}{c} 0\le z\le 1-x \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right\}$$

Για τα όρια ολοκλήρωσης ως προς y *θεωρούμε ευθεία* E *παράλληλη με τον* y*-άξονα (κάθετη στο* xz*-επίπεδο) που διέρχεται από σημείο* $(x,z)\in R$*. Η ευθεία αυτή εισέρχεται στο* T *στο σημείο* $(x,f_1(x,z),z)$ *που ανήκει στο επίπεδο*

$$x-y+z=0 \Longrightarrow x-f_1(x,z)+z=0 \Longrightarrow f_1(x,z)=x+z$$

και εξέρχεται από το T *στο σημείο* $(x,f_2(x,z),z)$ *που ανήκει στο επίπεδο*

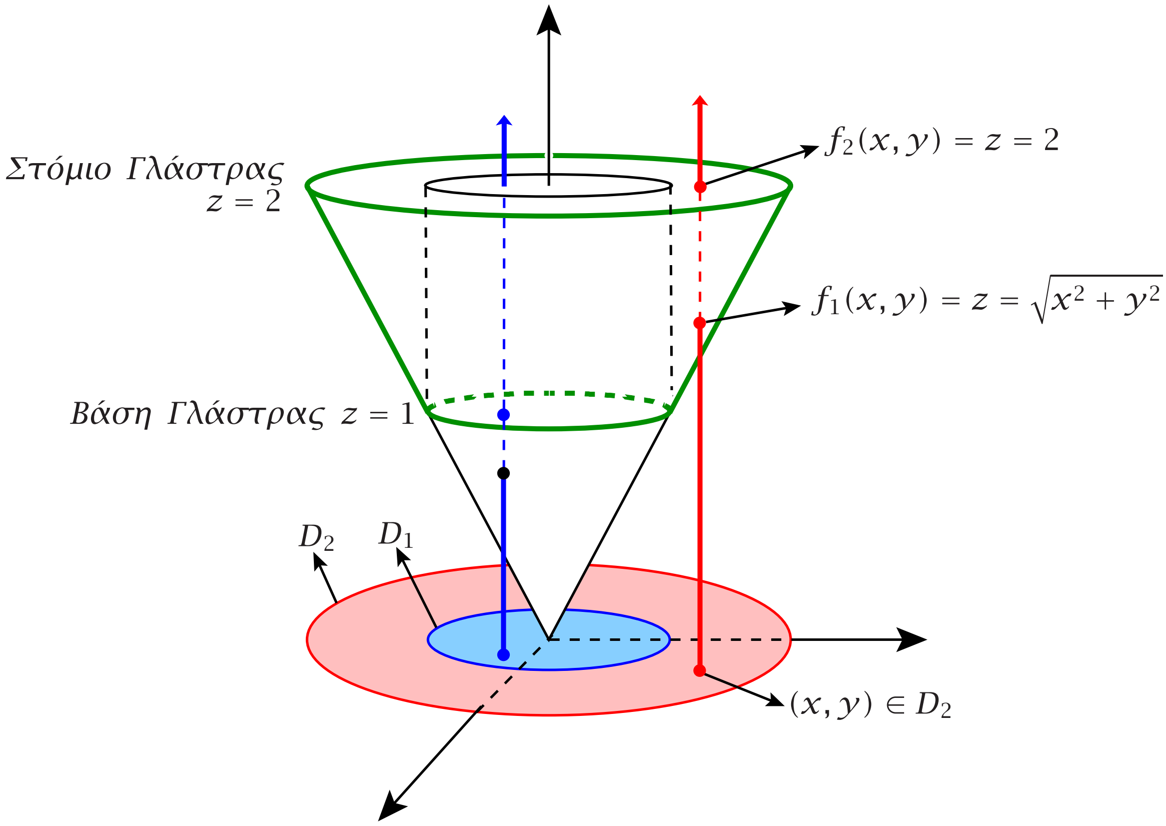
$$y=1 \Longrightarrow f_2(x,z)=1.$$

Από την σχέση (4), εκπεφρασμένη για την σειρά ολοκλήρωσης $dydzdx$*, έχουμε*

$$\begin{aligned}
V(T) &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+z}^{1} 1\, dydzdx = \int_0^1\int_0^{1-x}\left([y]_{y=x+z}^{y=1}\right) dzdx \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-z)\, dzdx = \int_0^1\left(\left[z-xz-\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x}\right) dx \\
&= \int_0^1\left((1-x)-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right) dx \\
&= \int_0^1\left(-\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\Big(\text{Εμβαδόν Βάσης}\Big)\Big(\text{Ύψος}\Big)
\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 *Υπολογισμός όγκου γλάστρας με βάση δίσκο διαμέτρου* 2 *και διάμετρο στο στόμιο (πάνω μέρος)* 4.

Στην εξίσωση του κώνου $z^2=x^2+y^2$, $z>0$ *για* $z=1$ *έχουμε* $x^2+y^2=1$ *που φράσσει δίσκο διαμέτρου* 2 *(βάση γλάστρας) και για* $z=2$ *έχουμε* $x^2+y^2=2^2$ *που φράσσει δίσκο διαμέτρου* 4 *(στόμιο γλάστρας). Συνεπώς, η γλάστρα ως στερεό ταυτίζεται με το στερεό που αποκόπτουν από τον κώνο* $z^2=x^2+y^2$ *τα επίπεδα* $z=1$ *και* $z=2$.



Στο σχήμα φαίνεται με πράσινο χρώμα η γλάστρα και ένας τρόπος υπολογισμού του όγκου της είναι να υπολογίσουμε τον όγκο του κώνου K_1 μέχρι το επίπεδο $z = 1$ και να τον αφαιρέσουμε από τον όγκο του κώνου K_2 μέχρι το επίπεδο $z = 2$. Η προβολή του K_1 στο xy-επίπεδο είναι ο δίσκος D_1 ακτίνας 1 και του K_2 είναι ο δίσκος D_2 ακτίνας 2 οι οποίοι σε καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζονται ως εξής:

$$D_2 = \left\{ \begin{array}{c} -\sqrt{2^2-x^2} \le y \le \sqrt{2^2-x^2} \\ -2 \le x \le 2 \end{array} \right\} \text{ και } D_1 = \left\{ \begin{array}{c} -\sqrt{1^2-x^2} \le y \le \sqrt{1^2-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{array} \right\}$$

Για τον όγκο του K_2 έχουμε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$V(K_2) = \iiint_{K_2} 1\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{2^2-x^2}}^{\sqrt{2^2-x^2}} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} 1\, dz dy dx$$

όπου τα όρια ολοκλήρωσης $f_1(x,y), f_2(x,y)$ καθορίζονται από το σημείο $(x, y, f_1(x,y))$ όταν αυτό ανήκει στην επιφάνεια του κώνου, άρα,

$$\big(f_1(x,y)\big)^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

και από το σημείο $(x, y, f_2(x,y))$ όταν αυτό ανήκει στην κορυφή (στόμιο) *της γλάστρας* $z = 2$, *άρα* $f_2(x, y) = 2$. *Συνεπώς, έχουμε*

$$\begin{aligned}
V(K_2) &= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{2^2-x^2}}^{\sqrt{2^2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} 1\, dzdydx \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{2^2-x^2}}^{\sqrt{2^2-x^2}} \left(\left[z \right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=2} \right) dydx \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{2^2-x^2}}^{\sqrt{2^2-x^2}} \left(2 - \sqrt{x^2+y^2} \right) dydx \\
\left[\begin{matrix} \textit{Μετατροπή σε} \\ \textit{πολικές} \end{matrix} \right] &= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} \left(2 - \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} \right) r dr d\theta \\
&= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} (2-r)\, r dr d\theta = \int_{0}^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\theta \\
&= \int_{0}^{2\pi} \left(4 - \frac{8}{3} \right) d\theta = \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Παρόμοια βρίσκουμε τον όγκο του K_1

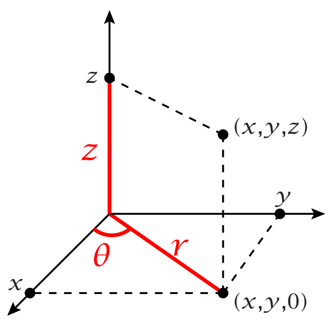
$$V(K_1) = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{1^2-x^2}}^{\sqrt{1^2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 1\, dzdydx = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} (1-r)\, r dr d\theta = \frac{\pi}{3},$$

και ο ζητούμενος όγκος είναι $V(K_2) - V(K_1) = \frac{8\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$.

4 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες αποτελούν ένα συνδυασμό των πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο και της τρίτης καρτεσιανής συντεταγμένης z. Αν $A = (x, y, z)$ είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}^3$, τότε το A καθορίζεται μοναδικά από το ζεύγος (x, y) και το z. Το ζεύγος (x, y) καθορίζεται μοναδικά από τις πολικές του συντεταγμένες (r, θ). Συνεπώς, το σημείο $A = (x, y, z)$ καθορίζεται μοναδικά από τις συντεταγμένες (r, θ, z) όπου οι αριθμοί r, θ και z δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \quad \text{και} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \\
z &= z
\end{aligned}$$



και ονομάζονται **κυλινδρικές συντεταγμένες** του σημείου A.

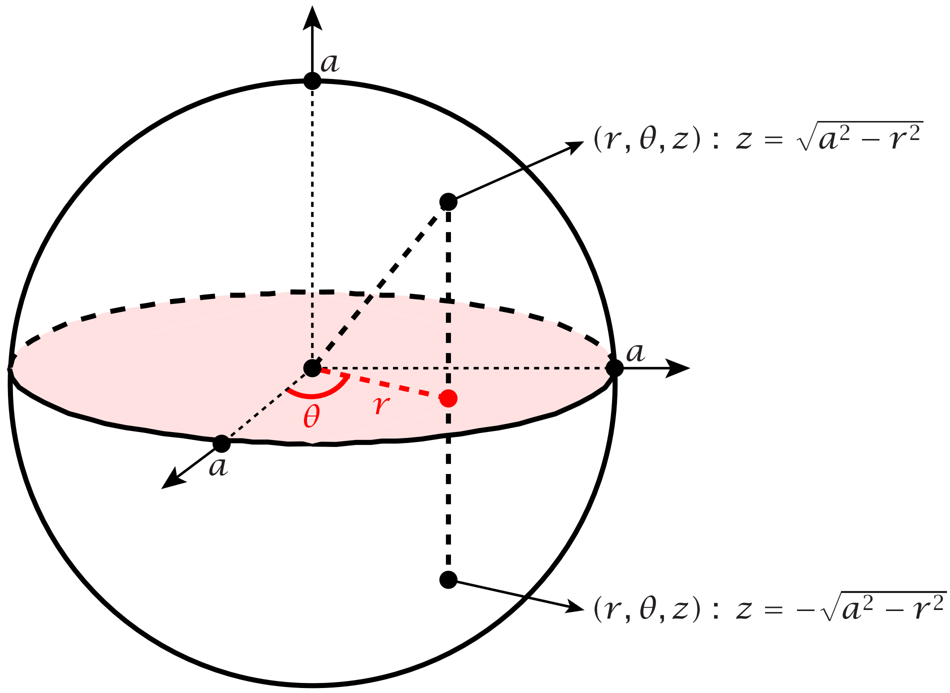
Με διαδικασία ανάλογη εκείνης του ορισμού του διπλού ολοκληρώματος με χρήση πολικών συντεταγμένων, αποδεικνύεται ότι το τριπλό ολοκλήρωμα με κυλινδρικές συντεταγμένες υπάρχει και υπολογίζεται με κατάλληλη διαδοχική ολοκλήρωση. Ειδικώτερα, η σχέση (4) για τον υπολογισμό όγκου με καρτεσιανές συντεταγμένες μετασχηματίζεται, όταν κάνουμε χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων, στην εξής σχέση

$$V(B) = \iiint_B 1\, dV = \int_{\theta=a}^{\theta=b} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} \int_{z=f_1(r,\theta)}^{z=f_2(r,\theta)} dz\, r\, dr\, d\theta. \tag{5}$$

όπου B είναι στερεό στον $\mathbb{R}^3$ το οποίο περιγράφεται με κυλινδρικές συντεταγμένες

$$B = \Big\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; \theta \in [a,b], g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta), z \in [f_1(r,\theta), f_2(r,\theta)]\Big\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 *Υπολογισμός όγκου σφαίρας ακτίνας* $a > 0$.



Η προβολή της σφαίρας ακτίνας $a > 0$ *στο επίπεδο είναι ο δίσκος* D *κέντρου* $(0,0)$ *και ακτίνας* $a > 0$. *Σε πολικές συντεταγμένες ο δίσκος είναι*

$$D = \Big\{(r,\theta) \;\Big|\; 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le a\Big\}.$$

Το εάν ένα σημείο (r, θ, z) *ανήκει στο εσωτερικό της σφαίρας εξαρτάται αφ΄ ενός από τις πολικές συντεταγμένες της προβολής του στο* xy-*επίπεδο, δηλαδή, από τα* (r, θ), *και αφ΄ ετέρου από από την τρίτη συντεταγμένη* z *για την οποία με χρήση των μετασχηματισμών* $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ *έχουμε*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Longrightarrow z^2 = a^2 - (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 \Longrightarrow z^2 = a^2 - r^2$$

Συνεπώς το σημείο (r, θ, z) *ανήκει στο εσωτερικό της σφαίρας αν και μόνο αν*

$$(r, \theta) \in D \ \textit{και} \ -\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$$

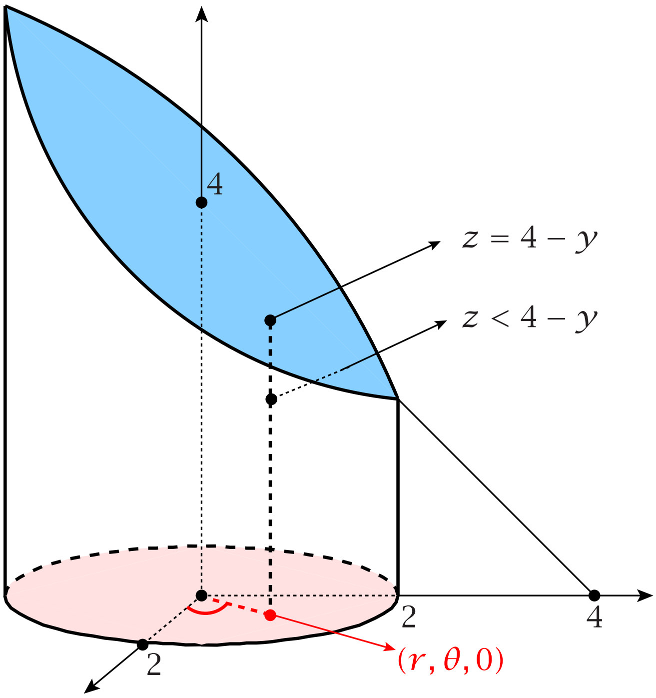
και ο όγκος της σφαίρας με τριπλό ολοκλήρωμα κυλινδρικών συντεταγμένων, σχέση (5), είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} 1\,dz\,r\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(2r\sqrt{a^2-r^2}\right) dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{2}{3}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}a^3 d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3.
\end{aligned}$$

Σημειωτέον ότι το τριπλό ολοκλήρωμα με καρτεσιανές συντεταγμένες που δίνει τον όγκο της σφαίρας ακτίνας a *είναι*

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 *Να βρεθεί ο όγκος του στερεού* B *που φράσσεται από τον κύλινδρο* $x^2 + y^2 = 2^2$ *και τα επίπεδα* $z = 0$ *και* $y + z = 4$.



Η βάση του B ταυτίζεται με την προβολή του στο xy-επίπεδο και είναι ο δίσκος D ακτίνας 2 ο οποίος σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \ \ \textit{και} \ \ 0 \leq r \leq 2.$$

Ένα σημείο (r, θ, z) *περιέχεται στο B αν και μόνο αν*

$$(r, \theta) \in D \ \ \textit{και} \ \ 0 \leq z \leq 4 - y \Longleftrightarrow 0 \leq z \leq 4 - r\sin\theta.$$

Τελικά το στερεό B σε κυλινδρικές συντεταγμένες περιγράφεται

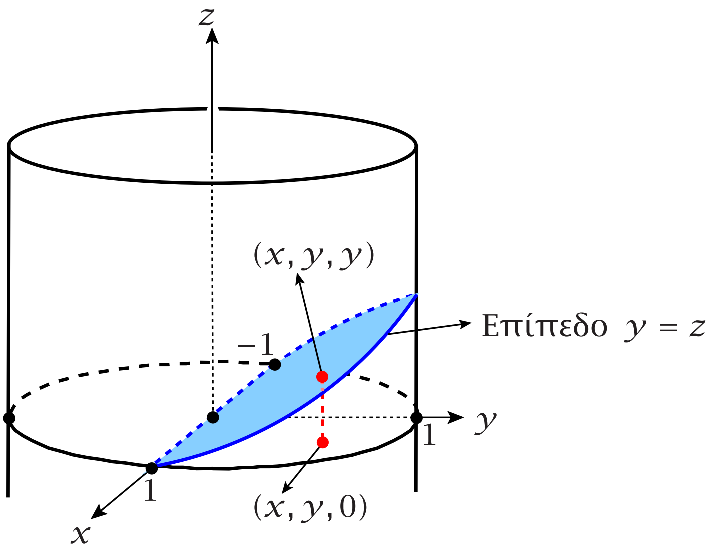
$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 \ \ \textit{και} \ \ 0 \leq z \leq 4 - r\sin\theta$$

και το τριπλό ολοκλήρωμα που δίνει τον όγκο του είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r\sin\theta} 1\,dz\,r\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \Big(r(4 - r\sin\theta)\Big)dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{1}{3}r^3\sin\theta\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\Big(8 - \frac{8}{3}\sin\theta\Big)d\theta = \cdots = 16\pi.
\end{aligned}$$

Λυμένες Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο όγκος του (σφηνοειδούς) στερεού που αποκόπτουν από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ το επίπεδο $z = y$ και το ημιεπίπεδο $z = 0$ με $y \geq 0$.



Η προβολή του στερεού στο xy-επίπεδο είναι ο ημιδίσκος

$$\left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\right\}$$

ο οποίος σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από τις ανισότητες

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2},$$

και σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τις ανισότητες

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{και} \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Για κάθε σημείο $(x, y, 0)$ το ευθύγραμμο τμήμα (εγκάρσιο στο xy-επίπεδο) με άκρα τα σημεία $(x, y, 0)$ και (x, y, y) περιέχεται ολόκληρο στο στερεό που μελετάμε. Δηλαδή, η τρίτη (καρτεσιανή) συντεταγμένη z δίνεται από την ανισότητα

$$0 \leq z \leq y \quad \text{και (σε πολική μορφή)} \quad 0 \leq z \leq r \sin\theta.$$

Το ολοκλήρωμα που υπολογίζει τον όγκο σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{y} 1\, dz dy dx$$

και σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{r\sin\theta} 1\, dz\, r dr d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin\theta dr d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{3} d\theta = \frac{2}{3}.$$

2. Γράψτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz dy dx$ σε ισοδύναμη μορφή χρησιμοποιώντας την σειρά ολοκλήρωσης

(a) $dxdydz$ (b) $dxdzdy$ (c) $dydzdx$ (d) $dydxdz$.

Από τα όρια ολοκλήρωσης του δοθέντος ολοκληρώματος προσδιορίζουμε το στερεό B που αυτά καθορίζουν:

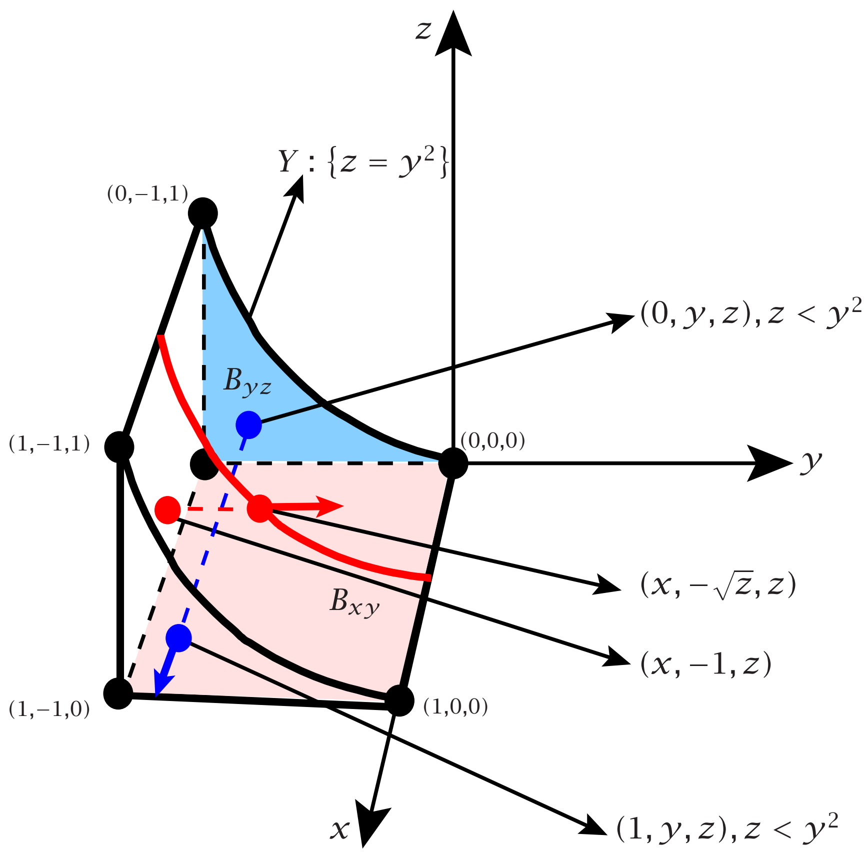
Αφού $x \in [0,1]$ και $y \in [-1,0]$, προφανώς, η προβολή του B στο xy-επίπεδο είναι το ορθογώνιο $B_{xy} = [0,1] \times [-1,0]$

και επειδή το κάτω όριο ολοκλήρωσης για το z είναι το 0 η προβολή B_{xy} είναι ταυτόχρονα και η βάση (κάτω φράγμα) του στερεού.

Αφού $z \in [0, y^2]$, η επιφάνεια που φράσσει προς τα πάνω το B είναι η $z = y^2$. Αυτή είναι κυλινδρικού τύπου επιφάνεια της μορφής

$$S(Y) := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x \in \mathbb{R} \text{ και } (y,z) \in Y\Big\}$$

όπου $Y = \{(y,z) \mid z = y^2\}$ είναι η παραβολή στο yz-επίπεδο, $\Big[$βλ. σχέση (1)$\Big]$.



(a) $dxdydz$: Η προβολή του B στο yz-επίπεδο είναι το χωρίο B_{yz} (με μπλε σκίαση στο σχήμα) που περιγράφεται

$$B_{yz} = \Big\{(0, y, z) \;\Big|\; -1 \le y \le -\sqrt{z} \text{ και } 0 \le z \le 1\Big\}$$

Θεωρούμε μια ευθεία εγκάρσια στο yz-επίπεδο που περιέχει ένα σημείο $(0, y, z)$ του B_{yz}. Η ευθεία αυτή εισέρχεται στο B για $x = 0$ και εξέρχεται για $x = 1$. Με άλλα λόγια το τμήμα της ευθείας με άκρα τα σημεία (μπλε στο σχήμα) $(0, y, z)$ και $(1, y, z)$ κείται εντός του B. Άρα τα όρια ολοκλήρωσης για την τρίτη (καρτεσιανή) συντεταγμένη x είναι

$$0 \le x \le 1.$$

Έτσι έχουμε ότι ένα σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) περιέχεται στο B αν και μόνο αν

$$(y, z) \in B_{yz} \text{ και } 0 \le x \le 1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le -\sqrt{z} \\ 0 \le z \le 1 \end{array} \right\}$$

και το ολοκλήρωμα με την σειρά $dxdydz$ είναι

$$\int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{z}} \int_0^1 1\, dxdydz.$$

(b) $dxdzdy$: Η προβολή του B στο yz-επίπεδο είναι προφανώς το ίδιο χωρίο B_{yz} το οποίο, προκειμένου η τελευταία ολοκλήρωση να είναι ως προς y περιγράφεται

$$B_{yz} = \Big\{(0, y, z) \;\Big|\; 0 \le z \le y^2 \text{ και } -1 \le y \le 0\Big\}$$

Τα όρια ως προς x είναι ακριβώς τα ίδια με την περίπτωση (a) και έτσι έχουμε

$$\int_{-1}^0 \int_0^{y^2} \int_0^1 1\, dxdzdy.$$

(c) $dydzdx$: Η προβολή του B στο xz-επίπεδο είναι το ορθογώνιο $B_{xz} = [0, 1] \times [0, 1]$, δηλαδή,

$$B_{xz} = \Big\{(x, 0, z) \;\Big|\; 0 \le z \le 1 \text{ και } 0 \le x \le 1\Big\}.$$

Θεωρούμε μια ευθεία εγκάρσια στο xz-επίπεδο που περιέχει ένα σημείο του B_{xz}. Η ευθεία αυτή εισέρχεται στο B για $y = -1$ και εξέρχεται για $y = -\sqrt{z}$. Με άλλα λόγια το τμήμα της ευθείας με άκρα τα σημεία (κόκκινα στο σχήμα) $(x, -\sqrt{z}, z)$ και $(x, -1, z)$ κείται εντός του B. Άρα τα όρια ολοκλήρωσης για την τρίτη συντεταγμένη y είναι

$$-1 \leq y \leq -\sqrt{z}$$

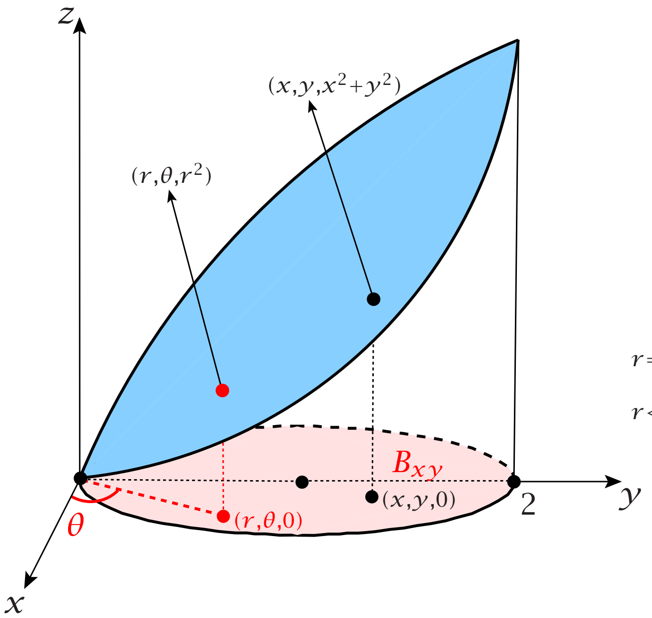
και το ολοκλήρωμα γίνεται

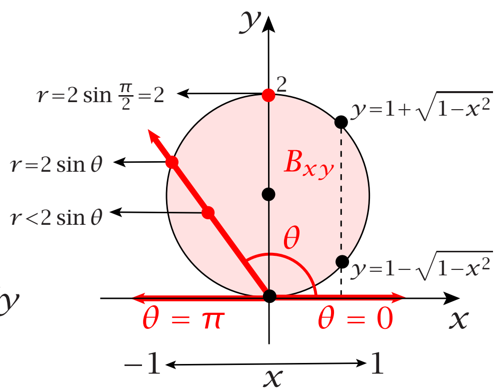
$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{z}} 1\, dydzdx.$$

<u>(d) $dydxdz$:</u> Αφού η προβολή B_{xz} είναι ορθογώνιο χωρίο η τελευταία εναλλαγή ολοκλήρωσης είναι άμεση

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{z}} 1\, dydxdz.$$

3. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού B που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2 + (y-1)^2 = 1$, το επίπεδο $z = 0$ και το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.





Η τομή του επιπέδου $z = 0$ με τον κύλινδρο $x^2 + (y-1)^2 = 1$ είναι η βάση B_{xy} του B που ταυτίζεται με την προβολή του B στο xy-επίπεδο:

$$B_{xy} = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2 + (y-1)^2 = 1\right\}$$

Ο δίσκος αυτός (κέντρου $(0,1)$ και ακτίνας 1) περιγράφεται σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες ως εξής:

$$B_{xy} = \left\{ \begin{array}{c} 1-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1+\sqrt{1-x^2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \text{ και } \Pi\left(B_{xy}\right) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq r \leq 2\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\}$$

Η ανισότητα $0 \leq r \leq 2\sin\theta$ προκύπτει, ως συνήθως, από την καρτεσιανή εξίσωση του κύκλου $x^2+(y-1)^2 = 1$ αντικαθιστώντας $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2y+1 = 1 &\implies (r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2-2r\sin\theta = 0 \\ &\implies r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-2r\sin\theta = 0 \\ &\implies r\,(r-2\sin\theta) = 0 \implies r = 2\sin\theta \end{aligned}$$

Δηλαδή τα σημεία (r,θ) που ικανοποιούν την εξίσωση $r = 2\sin\theta$ είναι η περιφέρεια του δίσκου B_{xy} και τα εσωτερικά σημεία ικανοποιούν την ανίσωση $0 \leq r < 2\sin\theta$.

Βρίσκουμε στην συνέχεια τα όρια ολοκλήρωσης για την τρίτη συντεταγμένη z σε καρτεσιανή και κυλινδρική μορφή:
Ένα σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z) περιέχεται στο B αν και μόνο αν

$$(x,y) \in B_{x,y} \text{ και } 0 \leq z \leq x^2+y^2 \iff \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq z \leq x^2+y^2 \\ 1-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1+\sqrt{1-x^2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

Ένα σημείο με κυλινδρικές συντεταγμένες (r,θ,z) περιέχεται στο B αν και μόνο αν

$$(r,\theta) \in B_{x,y} \text{ και } 0 \leq z \leq x^2+y^2 = r^2 \iff \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq z \leq r^2 \\ 0 \leq r \leq 2\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\}$$

Τα ολοκληρώματα που υπολογίζουν τον ζητούμενο όγκο είναι

$$\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{x^2+y^2} 1\,dz\,dy\,dx \equiv \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\sin\theta}\int_{0}^{r^2} 1\,dz\,r\,dr\,d\theta.$$

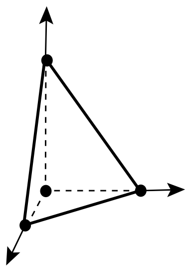
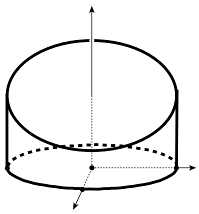
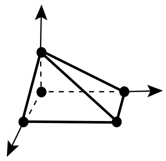
Ασκήσεις

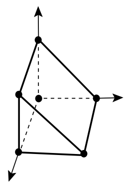
1. Βρείτε τον όγκο των παρακάτω στερεών στο χώρο με διπλή ή τριπλή ολοκλήρωση.

   (a) Το στερεό που βρίσκεται στο πρώτο οκτοημόριο (δηλ. $x, y, z \geq 0$) και φράσσεται από τα επίπεδα που ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων και το επίπεδο $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

   (b) Το στερεό που αποκόπτουν από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$ τα επίπεδα $z = 0$ και $x + z = 3$.

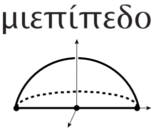
   (c) Το στερεό που βρίσκεται στο πρώτο οκτοημόριο και φράσσεται από τα επίπεδα που ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων και από τα επίπεδα $x + z = 1$ και $y + 2z = 2$.

   Υπόδειξη: (a):  (b):  (c): 

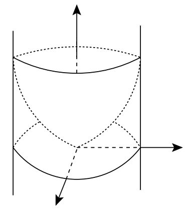
2. Να βρεθεί ο όγκος του χωρίου που φράσσεται από τα επίπεδα $x = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $y + z = 1$. Υπόδειξη: 

3. Αλλάξτε δύο φορές την σειρά ολοκλήρωσης στην απάντηση της άσκησης 2 έτσι ώστε κάθε φορά η τελευταία μεταβλητή να είναι άλλη από αυτή της απάντησης που δώσατε στην άσκηση 2.
   Υπόδειξη: Οι προβολές του χωρίου στα επίπεδα που ορίζουν οι άξονες είναι $R_{xy} = [0,2]\times[0,1]$, $R_{xz} = [0,2]\times[0,1]$, $R_{yz} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq z \leq 1 - y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}$.

4. Για το τετράεδρο του ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ 3 αλλάξτε την σειρά ολοκλήρωσης σε $dzdydx$. Υπόδειξη: $R_{xy} = \{0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\}$.

5. Γράψτε διπλά ολοκληρώματα με καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες που δίνουν τον όγκο του (σφηνοειδούς) στερεού που αποκόπτουν από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2^2$ το επίπεδο $z = -x$ και το ημιεπίπεδο $z = 0$ με $x \leq 0$. Υπόδειξη: 

6. Γράψτε ένα διπλό ολοκλήρωμα με καρτεσιανές συντεταγμένες και ένα τριπλό με κυλινδρικές που να υπολογίζουν τον όγκο του στερεού που φράσσεται από το xy-επίπεδο, το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και περικλείεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2^2$.

   Υπόδειξη: 

7. Γράψτε ένα διπλό και ένα τριπλό ολοκλήρωμα (χωρίς να τα υπολογίσετε) που να ισούται με τον όγκο του στερεού που φράσσεται από τα παραβολοειδή $z = 2x^2 + y^2$ και $z = 6 - x^2 - 2y^2$.

   Υπόδειξη: Η προβολή του στερεού στο xy-επίπεδο προκύπτει από την λύση του συστήματος $\left\{ \begin{array}{c} z = 2x^2 + y^2 \\ z = 6 - x^2 - 2y^2 \end{array} \right\}$ και είναι ο δίσκος $D = \left\{ (x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq \left(\sqrt{2}\right)^2 \right\}$.