Συνοπτικές Σημειώσεις **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

Κεφάλαιο #4

Διπλα Ολοκληρωματα

1 Ορισμός Ολοκληρώματος σε Ορθογώνια χωρία του $\mathbb{R}^2$

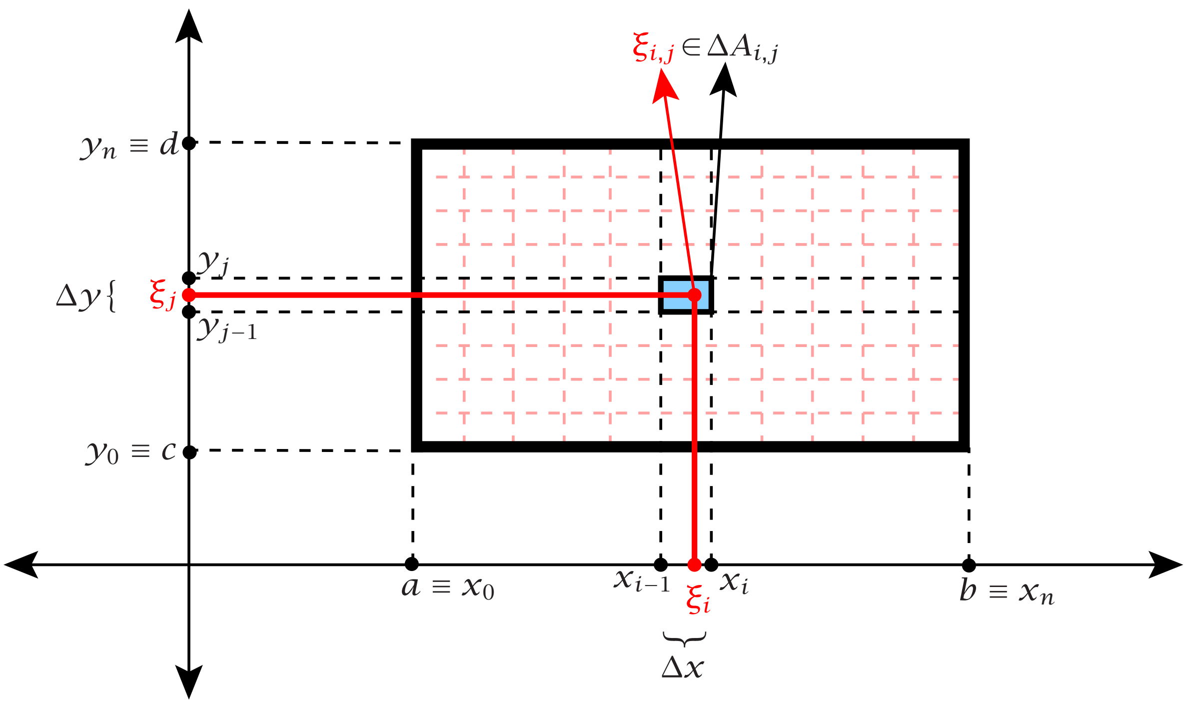
Έστω ορθογώνιο $R = [a, b] \times [c, d]$ στο $\mathbb{R}^2$ και $f : R \to \mathbb{R}$ συνεχής πραγματική συνάρτηση. Διαμερίζουμε τα διαστήματα $[a, b]$ και $[c, d]$ σε n ίσα υποδιαστήματα

$$[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n] = [x_0, x_n] \equiv [a, b]$$
$$[y_0, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup \cdots \cup [y_{n-1}, y_n] = [y_0, y_n] \equiv [c, d]$$

σχηματίζοντας έτσι $n \cdot n = n^2$ το πλήθος μικρά ορθογώνια

$$\{\Delta A_{i,j} \mid i, j = 1, \ldots n\}$$

εμβαδού $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$ όπου $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ και $\Delta y = \dfrac{d-c}{n}$.



Επιλέγουμε τυχαίο σημείο $\xi_{i,j} \in \Delta A_{i,j}$ και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = \sum_{i=1, j=1}^{n} f(\xi_{i,j})\, \Delta A.$$

Στο άθροισμα στο δεξιά μέλος της παραπάνω σχέσης εμφανίζονται n^2 το πλήθος όροι, ένας για κάθε (διατεταγμένο) ζεύγος (i, j) με $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.

Αποδεικνύεται ότι για συνεχείς συναρτήσεις το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων $\xi_{i,j} \in \Delta A_{i,j}$. Η τιμή του ορίου ονομάζεται **διπλό ολοκλήρωμα της f στο χωρίο R** και συμβολίζεται με

$$\iint_R f(x,y)\, dA \quad \text{ή} \quad \iint_R f\, dA.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 1 *Για $f, g : R \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $k \in \mathbb{R}$ έχουμε*

1. $\displaystyle\iint_R \big(f + g\big) dA = \iint_R f\, dA + \iint_R g\, dA.$
2. $\displaystyle\iint_R \big(kf\big) dA = k \iint_R f\, dA$
3. *Αν $f(x,y) \geq g(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in R$ τότε* $\displaystyle\iint_R f\, dA \geq \iint_R g\, dA$
   (και άρα $f \geq 0 \Longrightarrow \iint_R f\, dA \geq 0$).
4. *Αν R_1, R_2 είναι δύο μη επικαλυπτόμενα (δηλαδή, είτε δεν τέμνονται είτε η τομή τους είναι τμήμα πλευράς) ορθογώνια στο $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε $R_1 \cup R_2 = R$ τότε*
$$\iint_{R_1} f\, dA + \iint_{R_2} f\, dA = \iint_R f\, dA.$$

Το παρακάτω θεώρημα έχει μεγάλη υπολογιστική αξία διότι μετατρέπει το πρόβλημα υπολογισμού ενός διπλού ολοκληρώματος σε διαδοχικό υπολογισμό δύο ορισμένων ολοκληρωμάτων μιας μεταβλητής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (FUBINI) *Έστω $R = [a,b] \times [c,d]$ ορθογώνιο στο $\mathbb{R}^2$ και $f : R \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε*

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Στο πρώτο διαδοχικό ολοκλήρωμα, η ποσότητα στην παρένθεση $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\, dx$ είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα ως προς x, κατά συνέπεια, το αποτέλεσμα δεν θα περιέχει την μεταβλητή x. Με άλλα λόγια η εν λόγω ποσότητα στην παρένθεση είναι συνάρτηση του y και συνεπώς έχει έννοια η ολοκλήρωση

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Ακριβώς ανάλογα ισχύουν και για την ποσότητα $\int_c^d f(x,y)\,dy$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 *Για την συνάρτηση* $f : \underbrace{[0,2]\times[-1,1]}_{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(x,y) = 1-6x^2y$ *υπολογίζουμε*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_0^2 \left(1-6x^2y\right)\,dx\right)dy &= \int_{-1}^{1}\left(\left[x-2x^3y\right]_{x=0}^{x=2}\right)dy\\
&= \int_{-1}^{1}(2-16y)\,dy \;=\; \left[2y-8y^2\right]_{y=-1}^{y=1}\\
&= (2-8)-(-2-8)=4
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\int_0^2\left(\int_{-1}^{1}\left(1-6x^2y\right)\,dy\right)dx &= \int_0^2\left(\left[y-3x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=1}\right)dx\\
&= \int_0^2\left(1-3x^2-(-1-3x^2)\right)dx\\
&= \int_0^2 2\,dx = [2x]_{x=0}^{x=2} = 4.
\end{aligned}$$

Στο εξής, θα παραλείπουμε τις παρενθέσεις και θα γράφουμε

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad \iint_R f(x,y)\,dydx.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4 *Αν θεωρήσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης* $f(x,y)=1$, *για κάθε* $(x,y)\in R=[a,b]\times[c,d]$ *τότε, με βάση τον παραπάνω ορισμό, το μερικό άθροισμα* S_n *για κάθε* n *θα είναι*

$$S_n = \sum_{i=1,j=1}^{n} f\left(\xi_{i,j}\right)\Delta A = \sum_{i=1,j=1}^{n}\Delta A.$$

Το δεξιά μέλος της παραπάνω σχέσης είναι το άθροισμα των εμβαδών $\Delta A=\Delta x\cdot\Delta y$ *όλων των επιμέρους ορθογωνίων* $\Delta A_{i,j}$, *δηλαδή, ισούται με το εμβαδόν* $A(R)=(b-a)(d-c)$ *του ορθογωνίου* R.

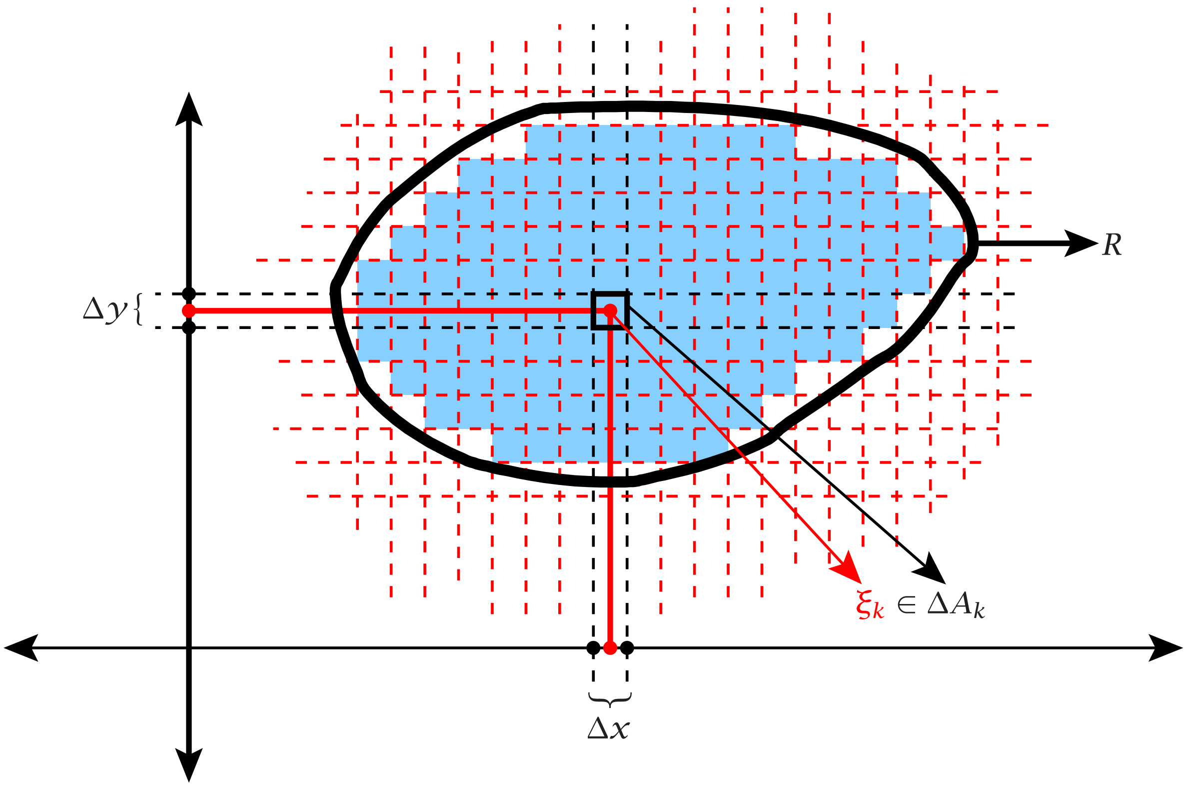
Εκτελώντας την ολοκλήρωση της σταθερής συνάρτησης $f(x,y)=1$, επί του R με χρήση του Θεωρήματος 2 Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dxdy &= \int_a^b\int_c^d 1\,dydx = \int_a^b\left(\int_c^d 1\,dy\right)dx = \int_a^b\left(\left[y\right]_{y=c}^{y=d}\right)dx\\
&= \int_a^b (d-c)\,dx = (d-c)\left[x\right]_{x=a}^{x=b} = (d-c)(b-a) = A(R).
\end{aligned}$$

2 Ορισμός Ολοκληρώματος σε Φραγμένα χωρία του $\mathbb{R}$

Έστω R φραγμένο χωρίο στο $\mathbb{R}^2$ που οριοθετείται (φράσσεται) από μία λεία (χωρίς αυτοτομές) καμπύλη, που ονομάζεται **σύνορο** του R, και f :

$R \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.



Θεωρούμε ευθείες παράλληλες μεταξύ τους και κάθετες στον x-άξονα με την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών να είναι σταθερή Δx. Παρομοίως θεωρούμε ευθείες κάθετες στον y-άξονα και παράλληλες μεταξύ τους και με την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών να είναι σταθερή Δy (βλ. το σχήμα παραπάνω).

Εκ των ορθογωνίων που σχηματίζονται, όλα με εμβαδό $\Delta x \cdot \Delta y$, αριθμούμε εκείνα τα μικρά ορθογώνια ΔA_k που περιέχονται ολόκληρα στο R, ας πούμε ότι είναι M το πλήθος

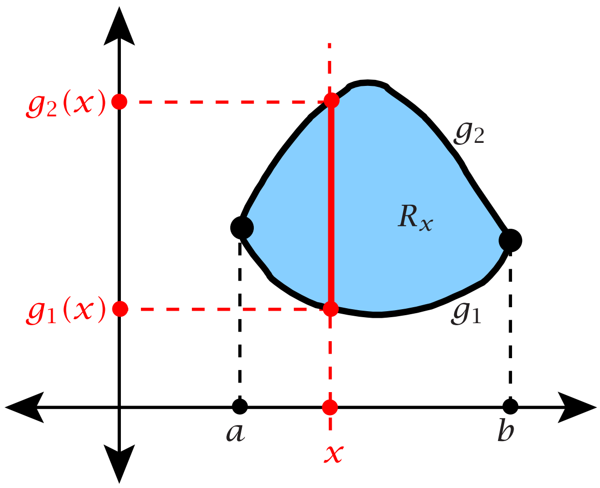
$$\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_M.$$

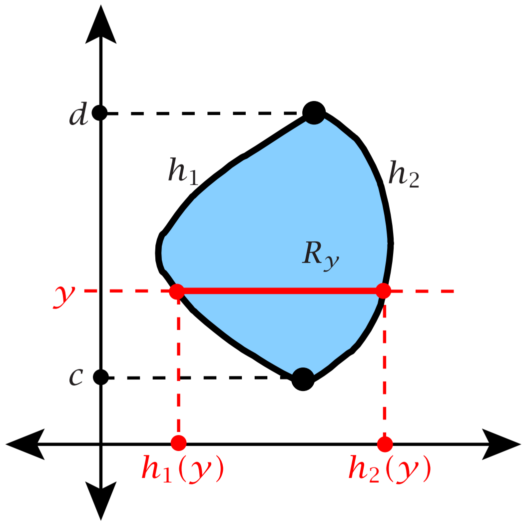
Στην συνέχεια επιλέγουμε (τυχαία) σημείο $\xi_k \in \Delta A_k$ και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_M = \sum_{k=1}^{k=M} f(\xi_k)\Delta x \Delta y.$$

Προφανώς, όταν και οι δύο αποστάσεις $\Delta x, \Delta y \longrightarrow 0$ τότε $M \longrightarrow \infty$ και αποδεικνύεται ότι αν f συνεχής τότε το όριο $\lim_{M\to\infty} S_M$ υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων $\xi_k \in \Delta A_k$. Την τιμή του ορίου την ορίζουμε να είναι το **διπλό ολοκλήρωμα της f στο χωρίο R.**

Ισχύουν όλες οι ιδιότητες που αναφέρονται στις ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 1 που αφορούσαν το διπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνια χωρία.





ΘΕΩΡΗΜΑ 5 (FUBINI-ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ) *Έστω R_x χωρίο στο $\mathbb{R}^2$ που καθορίζεται από τις σχέσεις $a \le x \le b$ και $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, για κάποιες συνεχείς συναρτήσεις $g_1, g_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή,*

$$R_x = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \text{ και } y \in [g_1(x), g_2(x)]\Big\}.$$

Αν $f : R \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\iint_{R_x} f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy dx$$

Παρομοίως, αν

$$R_y = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d] \text{ και } x \in [h_1(x), h_2(x)]\Big\}$$

για κάποιες συνεχείς $h_1, h_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, τότε

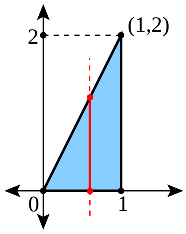
$$\iint_{R_y} f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx dy$$

Τα όρια ολοκλήρωσης καθορίζονται από την μορφή του χωρίου R_x ή R_y, που καθορίζει και την σειρά ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned} R_x &: \; x \in [a,b] \text{ και } y \in [g_1(x), g_2(x)] \\ R_y &: \; y \in [c,d] \text{ και } x \in [h_1(y), h_2(y)] \end{aligned}$$

Συχνά, ένα χωρίο είναι ταυτόχρονα και της μορφής R_x και της μορφής R_y. Σε αυτές τις περιπτώσεις η επιλογή της σειράς ολοκλήρωσης είναι δική μας ανάλογα με το τι μας διευκολύνει και τι είναι εφικτό στους περαιτέρω υπολογισμούς.

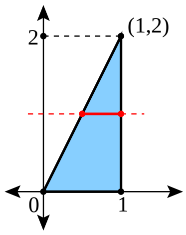
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 *Έστω η συνάρτηση* $f : R \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{\sin x}{x}$ *όπου* R *το τριγωνικό χωρίο στο* $\mathbb{R}^2$ *που φράσσεται από τις ευθείες* $x = 1$, $y = 2x$ *και τον* x*-άξονα. Το χωρίο αυτό μπορεί να εκφραστεί και στις δύο μορφές:*



για κάθε $x \in [0,1]$ *έχουμε* $y \in [0,2x]$

δηλαδή $g_1(x) = 0$ *και* $g_2(x) = 2x$

$R \equiv R_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1] \text{ και } y \in [0,2x]\right\}$



για κάθε $y \in [0,2]$ *έχουμε* $x \in [y/2, 1]$

δηλαδή $h_1(y) = \frac{y}{2}$ *και* $h_2(y) = 1$

$R \equiv R_y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,2] \text{ και } x \in [\frac{y}{2}, 1]\right\}$

Με την μορφή R_x *υπολογίζουμε*

$$\begin{aligned}
\int_{R_x} \frac{\sin x}{x}\, dA &= \int_0^1 \int_0^{2x} \frac{\sin x}{x}\, dy dx = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} \frac{\sin x}{x}\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[y \frac{\sin x}{x} \right]_{y=0}^{y=2x} \right) dx = \int_0^1 2x \frac{\sin x}{x}\, dx \\
&= \int_0^1 2 \sin x\, dx = \left[-2\cos x \right]_{x=0}^{x=1} = 2 - 2\cos 1
\end{aligned}$$

ενώ με την μορφή R_y *ο υπολογισμός του ολοκληρώματος δεν είναι εφικτός αφού στην παράσταση*

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \frac{\sin x}{x}\, dx dy$$

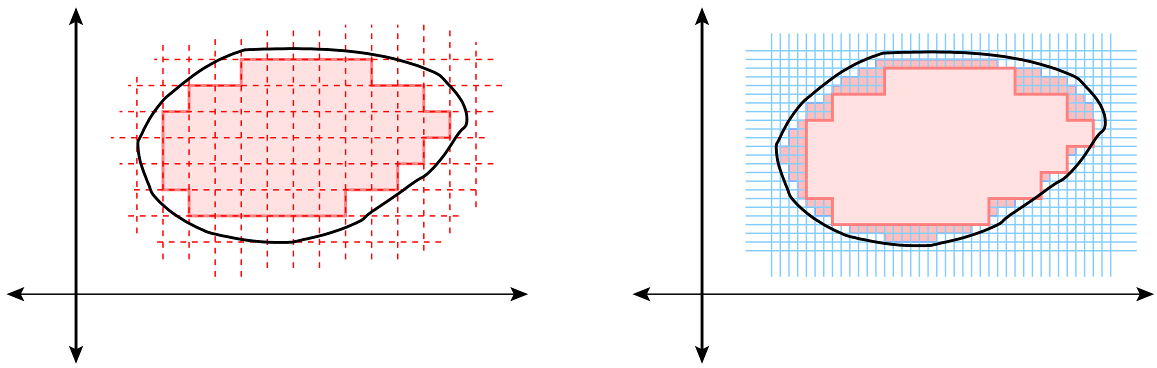
απαιτείται ο υπολογισμός του αορίστου ολοκληρώματος $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ *και αυτό το ολοκλήρωμα δεν δίνεται (υπολογίζεται) από κλειστό τύπο.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7 *Πανομοιότυπα με την ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4 που αφορούσε ορθογώνια χωρία, ισχύει και για γενικά χωρία* R *ότι το διπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης* $f(x,y) = 1$, *για κάθε* $(x,y) \in R$ *ισούται με το εμβαδόν του χωρίου*

$$A(R) = \iint_R 1\, dx dy \tag{1}$$

Αυτό είναι διαισθητικά σαφές ανατρέχοντας στον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος ως όριο μερικών αθροισμάτων

$$S_M = \sum_{k=1}^{k=M} \Delta x \Delta y, \text{ όπου } M \to \infty.$$



Για κάθε $M \in \mathbb{N}$, το άθροισμα στο δεξιά μέλος ισούται με το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων που περιέχονται ολόκληρα στο χωρίο R. Όταν $\Delta x, \Delta y \to \infty$ το μέγεθος των ορθογωνίων μικραίνει, το πλήθος τους μεγαλώνει ($M \to \infty$) και το άθροισμα S_M των εμβαδών τους είναι μια αύξουσα ακολουθία που συγκλίνει στο εμβαδόν του R:

$$\iint_R 1\, dxdy = \lim_{M\to\infty} S_M = \lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{k=M} \Delta x \Delta y = A(R).$$

Η σχέση (1) παραπάνω μπορεί να εξηγηθεί με αυστηρό τρόπο κάνοντας χρήση ολοκληρωμάτων μιας μεταβλητής.

Γνωρίζουμε (βλ. Κεφάλαιο 7 του μαθήματος ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α) ότι το εμβαδόν $A(R)$ χωρίου R που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g_2(x) \geq g_1(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. είναι

$$A(R) = \int_a^b \Big(g_2(x) - g_1(x)\Big)dx. \tag{2}$$

Αφού $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b], y \in [g_1(x), g_2(x)]\}$, από την γενική μορφή του ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 5 (Fubini) και για την σταθερή συνάρτηση $f(x,y) = 1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\iint_R 1\ dydx &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\, dydx = \int_a^b \Big[y\Big]_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dx \\
&= \int_a^b \Big(g_2(x) - g_1(x)\Big)dx \overset{(2)}{=} A(R).
\end{aligned}$$

3 Όρια Ολοκλήρωσης και αντιστροφή σειράς Ολοκλήρωσης

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε κυρίως με τα όρια ολοκλήρωσης και γι΄ αυτό δεν θα μας απασχολεί η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση. Ο πλήρης υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος συχνά θα παραλείπεται.

Τα όρια ολοκλήρωσης στην περίπτωση ορθογωνίου χωρίου (βλ. ΘΕΩΡΗΜΑ 2) είναι σταθεροί αριθμοί και καθορίζονται άμεσα από το ορθογώνιο. Αντιθέτως, στην γενική περίπτωση του χωρίων της μορφής R_x και R_y (βλ. ΘΕΩΡΗΜΑ 5) απαιτείται προσδιορισμός των ορίων ολοκλήρωσης. Εν γένει, τα χωρία ολοκλήρωσης περιγράφονται από τις καμπύλες που τα οριοθετούν και για να τα προσδιορίσουμε εργαζόμαστε ως εξής:

Για χωρία της μορφής R_x :

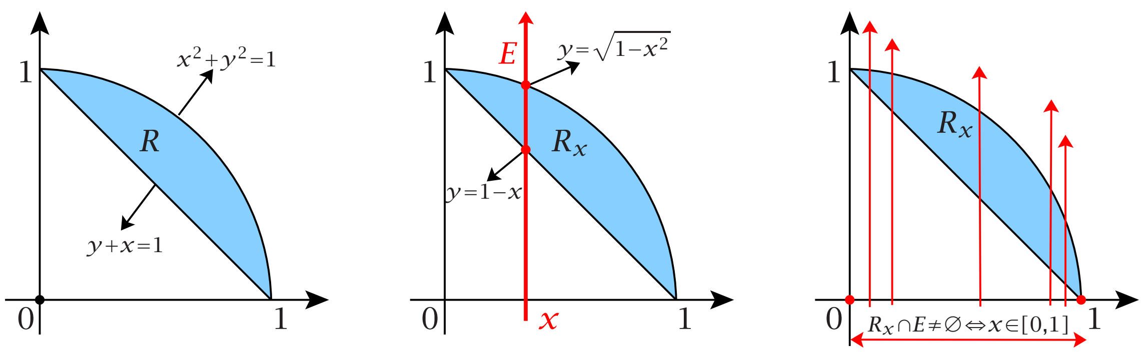
- Σχεδιάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης, ονομάζουμε τις καμπύλες και βρίσκουμε όλα τα εμπλεκόμενα σημεία τομής τους.

- Για τα όρια ολοκλήρωσης της μεταβλητής y, θεωρούμε ευθείες E παράλληλες στον y-άξονα που τέμνουν το χωρίο και σημειώνουμε τις τιμές του y που αντιστοιχούν στα σημεία εισόδου και εξόδου της E από το χωρίο. Οι τιμές αυτές (που είναι συναρτήσεις ως προς x αλλά μπορεί να είναι και σταθερές συναρτήσεις) είναι τα όρια ολοκλήρωσης ως προς y.

- Τα όρια ολοκλήρωσης ως προς x καθορίζονται από όλες τις τιμές x που οι αντίστοιχες ευθείες τέμνουν το R_x.

Για χωρία της μορφής R_y : εργαζόμαστε πανομοιότυπα θεωρώντας ευθείες E παράλληλες στον x-άξονα προκειμένου να καθορίσουμε τα όρια (συναρτήσεις) ολοκλήρωσης ως προς x και στην συνέχεια τα όρια ολοκλήρωσης (διάστημα) ως προς y.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 *Έστω R το χωρίο που φράσσεται από το άνω ημικύκλιο $(y \geq 0)$ κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1 και της ευθείας $y + x = 1$.*



Οι καμπύλες που οριοθετούν το χωρίο R είναι ο κύκλος $x^2+y^2=1$ και η ευθεία $y+x=1$ που τέμνονται στα σημεία $(0,1)$ και $(1,0)$ διότι

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ y+x=1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-y)^2+y^2=1 \\ x=1-y \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y(y-1)=0 \\ x=1-y \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0,1 \\ x=1,0 \end{array}\right\}$$

Θεωρούμε το χωρίο R ως χωρίο της μορφής R_x και προκειμένου να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κάποιας συνάρτησης $f: R \to \mathbb{R}$ επί του $R = R_x$

$$\iint_{R_x} f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx$$

βρίσκουμε πρώτα τα όρια ολοκλήρωσης ως προς y:

> *Θεωρούμε ευθεία E παράλληλη στον y-άξονα και εκφράζουμε τα σημεία τομής της E με το σύνορο του R_x (σημεία εισόδου και εξόδου της E στο χωρίο) ως συναρτήσεις του x. Στο παράδειγμά μας οι τιμές είναι $g_1(x) = 1-x$ και $g_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ άρα τα όρια ολοκλήρωσης ως προς y είναι*
>
> $$1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}.$$

Στην συνέχεια, προσδιορίζουμε τα όρια ολοκλήρωσης ως προς x:

> *Παρατηρούμε ότι μια ευθεία E παράλληλη στον y-άξονα τέμνει το χωρίο αν και μόνο αν η E διέρχεται από σημείο του x-άξονα με $x \in [0,1]$, άρα*
>
> $$0 \le x \le 1.$$

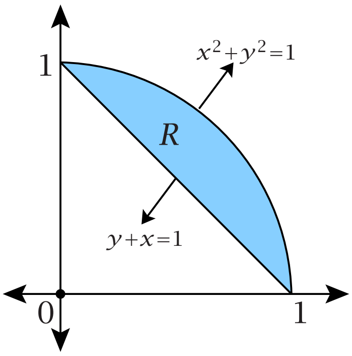
Συνεπώς, για τον υπολογισμό διπλού ολοκληρώματος συνάρτησης f επί του R_x έχουμε

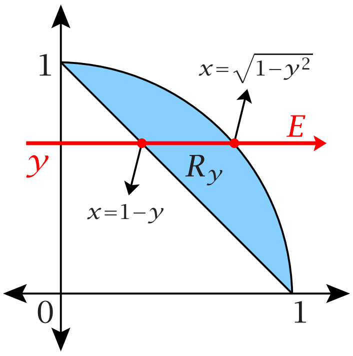
$$\iint_{R_x} f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx.$$

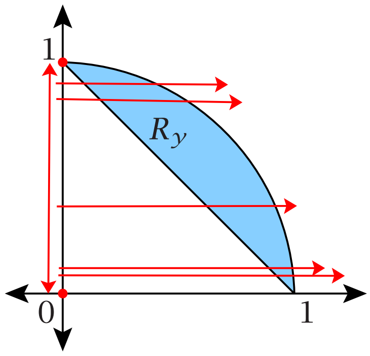
Το συγκεκριμένο χωρίο R του παραδείγματος μπορεί να θεωρηθεί και ως χωρίο τύπου R_y. Περιγράφουμε στην συνέχεια τον υπολογισμό των ορίων ολοκλήρωσης με βάση αυτή την θεώρηση

$$\iint_{R_y} f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dxdy$$

όπου η διπλή ολοκλήρωση γίνεται με την αντίστροφη σειρά, δηλαδή πρώτα ως προς x και μετά ως προς y.







Θεωρούμε ευθεία E παράλληλη στον x-άξονα και εκφράζουμε τα σημεία τομής της E με το σύνορο του R_y (σημεία εισόδου και εξόδου της E στο χωρίο) ως συναρτήσεις του y. Στο παράδειγμά μας οι τιμές είναι $h_1(y) = 1 - y$ και $h_2(y) = \sqrt{1-y^2}$ άρα τα όρια ολοκλήρωσης ως προς x είναι

$$1 - y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}.$$

Στην συνέχεια, για να προσδιορίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης ως προς y παρατηρούμε ότι $R_y \cap E \neq \varnothing \Leftrightarrow y \in [0,1]$ άρα

$$0 \leq y \leq 1$$

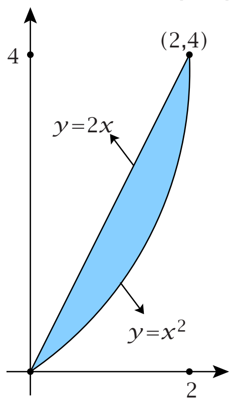
και

$$\iint_{R_y} f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 *Σχεδιασμός του χωρίου ολοκλήρωσης του ολοκληρώματος*

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,dydx$$

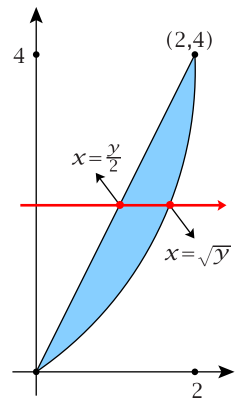
και αντιστροφή της σειράς ολοκλήρωσης.



Το χωρίο ολοκλήρωσης οριοθετείται από τις ανισότητες $x^2 \leq y \leq 2x$ και $0 \leq x \leq 2$. Συνεπώς, το χωρίο φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = 2x$. Αυτήν την πληροφορία την «διαβάζουμε» από το διπλό ολοκλήρωμα που μας δόθηκε στην εκφώνηση.

Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης με την αντίστροφη σειρά, θεωρούμε ευθεία E παράλληλη με τον x-άξονα (με κατεύθυνση αυτήν της αύξησης *του x, δηλαδή, με κατεύθυνση από αριστερά προς δεξιά).*

Μία τέτοια ευθεία εισέρχεται στο χωρίο για x που ικανοποιεί την εξίσωση της ευθείας $y = 2x$, άρα $x = y/2$ και εξέρχεται για x που ικανοποιεί την εξίσωση της παραβολής $y = x^2$, άρα, $x = \sqrt{y}$. Επίσης, τέτοιες ευθείες τέμνουν το χωρίο αν και μόνο αν τέμνουν τον y-άξονα στο διάστημα $[0, 4]$. Τελικώς, τα όρια ολοκλήρωσης είναι



$$\frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y} \text{ και } \quad 0 \leq y \leq 4$$

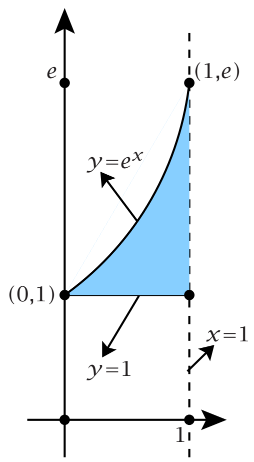
και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\, dy dx = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (4x+2)\, dx dy.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 *Σχεδιασμός του χωρίου ολοκλήρωσης του ολοκληρώματος*

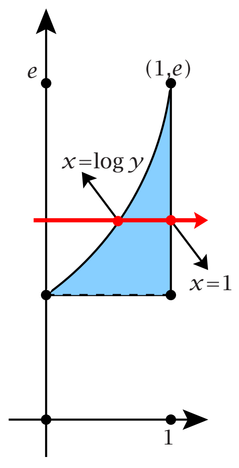
$$\int_0^1 \int_1^{e^x} 1\, dy dx$$

και αντιστροφή της σειράς ολοκλήρωσης.



Το χωρίο ολοκλήρωσης οριοθετείται από τις ανισότητες $1 \leq y \leq e^x$ και $0 \leq x \leq 1$. Συνεπώς, το χωρίο φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής συνάρτησης $y = e^x$ και της ευθείας $y = 1$ οι οποίες τέμνονται μόνο στο σημείο $(0, 1)$. Άρα η ευθεία $x = 1$ (η διακεκομμένη στο διπλανό σχήμα) οριοθετεί το χωρίο.

Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης με την αντίστροφη σειρά, θεωρούμε ευθεία E παράλληλη με τον x-άξονα (με κατεύθυνση αυτήν της αύξησης του x, δηλαδή, με κατεύθυνση από αριστερά προς δεξιά). Μία τέτοια ευθεία εισέρχεται στο χωρίο για x που ανήκει στο γράφημα της εκθετικής συνάρτησης $y = e^x$, άρα $x = \log y$ και εξέρχεται για $x = 1$.



Επίσης, τέτοιες ευθείες τέμνουν το χωρίο αν και μόνο αν τέμνουν τον y-άξονα στο διάστημα $[1,e]$. Τελικώς, τα όρια ολοκλήρωσης είναι

$$\log y \le x \le 1 \text{ και } \ 1 \le y \le e$$

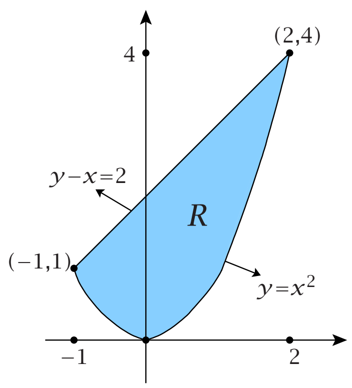
και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_1^e \int_{\log y}^1 1\, dx dy.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11 *Έστω R το χωρίο που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y - x = 2$. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = xy$ επί του R*

$$\iint_R (xy)\, dA.$$

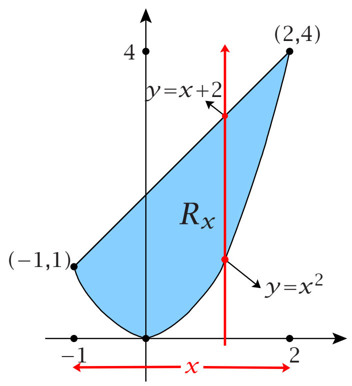
και με τις δύο σειρές ολοκλήρωσης ($dxdy$ και $dydx$).



Τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y - x = 2$ είναι τα $(-1,1)$ και $(2,4)$ διότι

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ y - x = 2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = (y-2)^2 \\ x = y - 2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2 - 5y + 4 = 0 \\ x = y - 2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 1,4 \\ x = -1,2 \end{array}\right\}$$

και το χωρίο ολοκλήρωσης R φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Για την σειρά ολοκλήρωσης $dydx$ θεωρούμε το χωρίο R ως χωρίο της μορφής R_x και βρίσκουμε τα σημεία τομής ευθείας E παράλληλης προς τον y-άξονα με το σύνορο του χωρίου. Αυτά είναι :

Σημείο εισόδου: $y = x^2$

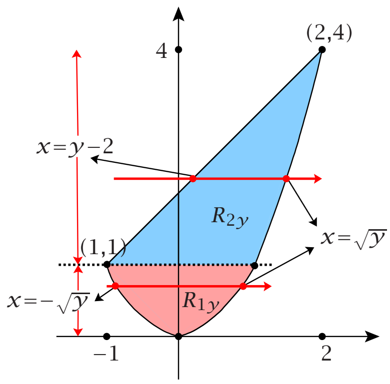
Σημείο εξόδου: $y - x = 2 \Longrightarrow y = x + 2$

Επίσης, η ευθεία E τέμνει το χωρίο αν και μόνο αν $x \in [-1,2]$. Συνεπώς τα όρια ολοκλήρωσης είναι

$$x^2 \le y \le x + 2 \text{ και } -1 \le x \le 2$$

και το ζητούμενο διπλό ολοκλήρωμα είναι

$$
\begin{aligned}
\iint_R (xy)\,dA &= \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} xy\,dy\,dx = \int_{-1}^{2}\left(\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x+2}\right)dx\\
&= \int_{-1}^{2}\left(\frac{x(x+2)^2}{2}-\frac{x\left(x^2\right)^2}{2}\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left(-x^5+x^3+4x^2+4x\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+2x^2\right]_{x=-1}^{x=2} = \cdots = \frac{45}{8}.
\end{aligned}
$$



Για την σειρά ολοκλήρωσης $dxdy$ θα θεωρήσουμε ευθείες E παράλληλες προς τον x-άξονα. Παρατηρούμε ότι το σημείο εξόδου είναι σημείο της παραβολής $y=x^2$, άρα, έχει $x=\sqrt{y}$. Αυτό συμβαίνει για κάθε ευθεία E που τέμνει το χωρίο R, ή ισοδύναμα, τον y-άξονα στο διάστημα $[0,4]$.

Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο για τα σημεία εισόδου. Συγκεκριμένα, αν η ευθεία E τέμνει τον y-άξονα στο διάστημα $[0,1]$ τότε το σημείο εισόδου είναι σημείο της παραβολής $y=x^2$, άρα, έχει $x=-\sqrt{y}$ και αν τέμνει τον y-άξονα στο διάστημα $[1,4]$ τότε το σημείο εισόδου είναι σημείο της ευθείας $y-x=2$, άρα, έχει $x=y-2$. Το πρόβλημα αυτό παρακάμπτεται χωρίζοντας το χωρίο R σε δύο χωρία, R_{1y} και R_{2y} με

$$R_{1y}=\left\{(x,y)\in R \;\middle|\; y\in[0,1]\right\} \;\; \textit{και} \;\; R_{2y}=\left\{(x,y)\in R \;\middle|\; y\in[1,4]\right\}.$$

Προφανώς, $R_{1y}\cup R_{2y}=R$ και από την ΙΔΙΟΤΗΤΑ 1(4) (που ισχύει γενικά και όχι μόνο για ορθογώνια) έχουμε

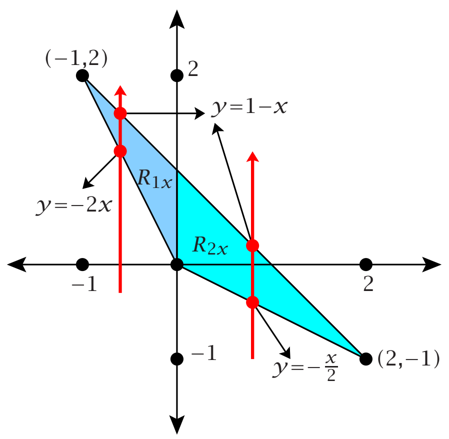
$$\iint_R (xy)\,dA = \iint_{R_{1y}} (xy)\,dA + \iint_{R_{2y}} (xy)\,dA.$$

Με άλλα λόγια, υπολογίζουμε τα δύο ολοκληρώματα στο δεξιά μέλος το κάθε ένα ξεχωριστά με χρήση των σημείων εισόδου και εξόδου που αναφέρθηκαν παραπάνω:

$$
\begin{aligned}
\iint_{R_{1y}} (xy)\,dA &= \int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (xy)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\left[\frac{x^2y}{2}\right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}}\right)dy\\
&= \int_0^1\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)dy = 0
\end{aligned}
$$

$$\text{και } \iint_{R_{2y}} (xy)\,dA = \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} (xy)\,dx dy == \int_1^4 \left(\left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=y-2}^{x=\sqrt{y}} \right) dy$$
$$= \int_1^4 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{(y-2)^2 y}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_1^4 \left(-y^3 + 5y^2 - 4y \right) dy$$
$$= = \frac{1}{2} \left[-\frac{y^4}{4} + \frac{5y^3}{3} - 2y^2 \right]_{y=1}^{y=4} = \cdots = \frac{45}{8}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12 *Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου R που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών $y + x = 1$, $y + 2x = 0$ και $y + \frac{x}{2} = 0$.*



Τα σημεία τομής των ευθειών βρίσκονται λύνοντας τα αντίστοιχα συστήματα. Για παράδειγμα, οι ευθείες $y + x = 1$ και $y + 2x = 0$ τέμνονται στο σημείο $(-1, 2)$ διότι

$$\left\{ \begin{array}{c} y + x = 1 \\ y = -2x \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x + x = 1 \\ y = -2x \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -1 \\ y = 2 \end{array} \right\}$$

Παρόμοια βρίσκουμε τα υπόλοιπα σημεία τομής $(0, 0)$ και $(2, -1)$. Το τριγωνικό χωρίο R που σχηματίζεται φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Παρατηρήστε ότι αν μία ευθεία E παράλληλη με τον y-άξονα τέμνει τον x-άξονα στο διάστημα $[0, 2]$ τότε το σημείο εισόδου της στο R είναι σημείο της ευθείας $y + \frac{x}{2} = 0$, ενώ αν τέμνει τον x-άξονα στο διάστημα $[-1, 0]$ τότε το σημείο εισόδου είναι σημείο της ευθείας $y+2x = 0$. Άρα, το τριγωνικό χωρίο R δεν μπορούμε να το θεωρήσουμε ως χωρίο τύπου R_x και με πανομοιότυπο τρόπο διαπιστώνουμε ότι δεν μπορούμε να το θεωρήσουμε ούτε ως χωρίο R_y. Το πρόβλημα αυτό παρακάμπτεται (όπως ακριβώς κάναμε στο δεύτερο τμήμα του προηγούμενου παραδείγματος) χωρίζοντας το χωρίο R σε δύο χωρία, R_{1x} και R_{2x} ως εξής:

$$R_{1x} = \{(x, y) \in R \mid x \in [-1, 0]\} \text{ και } R_{2x} = \{(x, y) \in R \mid x \in [0, 2]\}.$$

Για το χωρίο R_{1x} έχουμε τα όρια ολοκλήρωσης

$$-2x \le y \le 1 - x \text{ και } -1 \le x \le 0$$

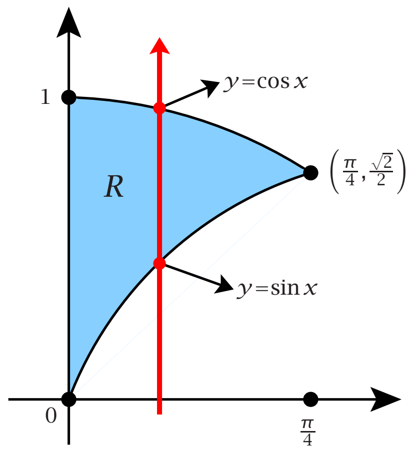
και για το χωρίο R_{2x} έχουμε τα όρια ολοκλήρωσης

$$-\frac{x}{2} \le y \le 1 - x \text{ και } 0 \le x \le 2$$

και το εμβαδόν του τριγωνικού χωρίου με βάση την σχέση (1) της ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ 7 είναι

$$\begin{aligned} A(R) = \iint_R dy\,dx &= \iint_{R_{1x}} dy\,dx + \iint_{R_{2x}} dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{0}\int_{-2x}^{1-x} dy\,dx + \int_{0}^{2}\int_{-\frac{x}{2}}^{1-x} dy\,dx \\ \begin{bmatrix}\text{η μεγάλη πλευρά έχει μέτρο} \\ 3\sqrt{2} \text{ και το ύψος είναι } \sqrt{2}/2\end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\,3\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13 *Να βρεθεί το εμβαδόν του φραγμένου χωρίου R που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, εφάπτεται στον y-άξονα και φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις ημιτόνου και συνημιτόνου.*



Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $\sin x$ *και* $\cos x$ *δίνονται από εκείνα τα* x *για τα οποία ισχύει*

$$\sin x = \cos x \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Εξ αυτών, το εγγύτερο στον y-άξονα που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο είναι το σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Θεωρώντας το χωρίο ως χωρίο τύπου R_x έχουμε τα εξής όρια ολοκλήρωσης

$$\sin x \le y \le \cos x \text{ και } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

Από τον τύπο (1) του εμβαδού (βλ. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7) έχουμε

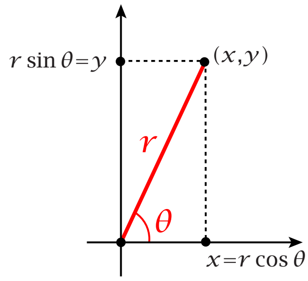
$$\begin{aligned} A(R) = \iint_R 1\,dy\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sin x}^{\cos x} 1\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos x - \sin x\right) dx \\ &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

4 Ολοκλήρωση με Πολικές Συντεταγμένες

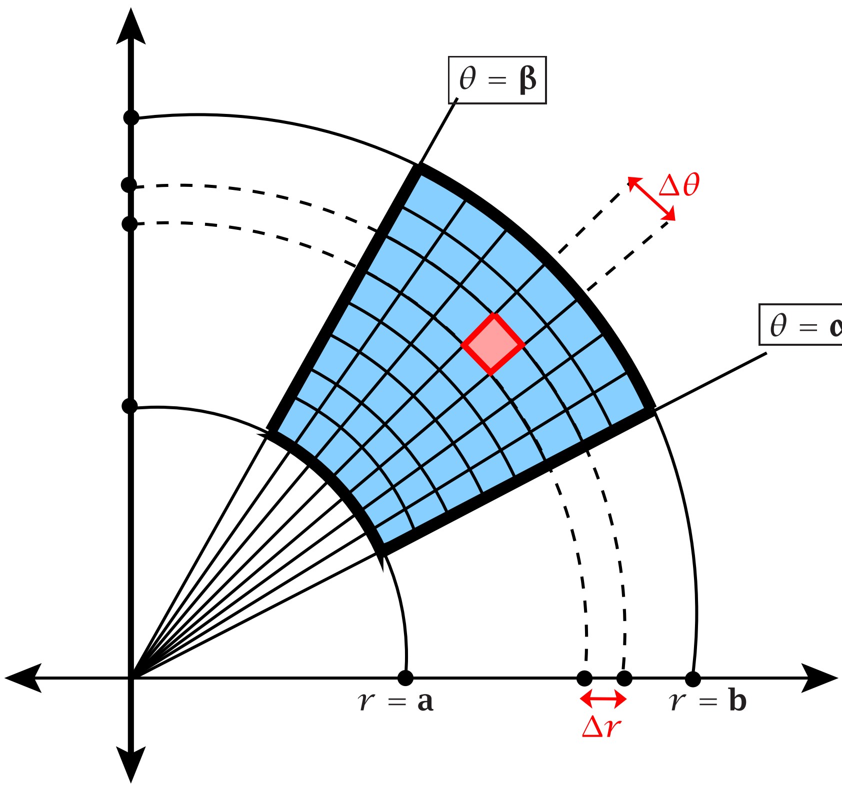
Κάθε σημείο $A = (x, y)$ του επιπέδου καθορίζεται μοναδικά από τη απόστασή του r από την αρχή των αξόνων $(0,0)$ και την γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ που σχηματίζει το άνυσμα θέσης του A με τον θετικό x-ημιάξονα.

Οι αριθμοί αυτοί καθορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \quad \text{και} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$



και ονομάζονται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου A.



Στο παραπάνω στο σχήμα το χρωματισμένο (μπλε) χωρίο είναι ένα πολικό ορθογώνιο και απαρτίζεται από όλα τα σημεία του επιπέδου που έχουν πολικές συντεταγμένες

$$(r,\theta) \in [\mathbf{a},\mathbf{b}] \times [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}].$$

Στην παράγραφο 2 ορίσαμε το διπλό ολοκλήρωμα συνάρτησης με καρτεσιανές συντεταγμένες διαμερίζοντας το (ορθογώνιο) χωρίο ολοκλήρωσης με παράλληλες ευθείες της μορφής x=σταθερά και y=σταθερά. Οι αντίστοιχες ευθείες στις πολικές συντεταγμένες είναι

r=σταθερά και θ=σταθερά,

δηλαδή, κύκλοι ακτίνας r και ημιευθείες γωνίας θ με τον θετικό x-ημιάξονα. Για να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση με χρήση πολικών συντεταγμένων ακολουθούμε την ίδια τεχνική διαμέρισης του πολικού ορθογωνίου σε μικρά (πολικά) ορθογώνια με πολικές ευθείες (κύκλους αυξανόμενης ακτίνας)

$$r = \mathbf{a}, \quad r = \mathbf{a} + \Delta r, \quad r = \mathbf{a} + 2\Delta r, \quad \ldots \quad , \quad r = \mathbf{a} + n\Delta r = \mathbf{b}$$

και πολικές ευθείες (ημιευθείες με αρχή το $(0,0)$)

$$\theta = \boldsymbol{\alpha}, \quad \theta = \boldsymbol{\alpha} + \Delta\theta, \quad \theta = \boldsymbol{\alpha} + 2\Delta\theta, \quad \ldots \quad , \quad \theta = \boldsymbol{\alpha} + n\Delta\theta = \boldsymbol{\beta}$$

Τα n^2 το πλήθος μικρά πολικά ορθογώνια που προκύπτουν

$$\Delta A_{i,j}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n$$

δεν έχουν σταθερό εμβαδόν (όπως συνέβαινε με τις καρτεσιανές συντεταγμένες). Το εμβαδόν ενός πολικού ορθογωνίου εξαρτάται γραμμικά, εκτός από το «πλάτος» του Δr και το «ύψος» του $\Delta\theta$, και από την απόστασή του r από την αρχή των αξόνων. Κατά συνέπεια, τα σχηματιζόμενα μερικά αθροίσματα S_n θα είναι της μορφής

$$S_n = \sum_{i=1,j=1}^{n} f\left(r_i, \theta_j\right) r_i \Delta r \Delta\theta.$$

Πανομοιότυπα με την περίπτωση των καρτεσιανών συντεταγμένων αποδεικνύεται ότι για συνεχείς συναρτήσεις $f(r,\theta)$ το όριο

$$\lim_{n\to\infty} S_n \text{ όταν } \Delta r, \Delta\theta \longrightarrow 0 \text{ και άρα } n \to \infty$$

<u>υπάρχει</u> και είναι <u>ανεξάρτητο</u> από την επιλογή των σημείων (r_i, θ_j)
Το όριο αυτό είναι το ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες και αποδεικνύεται ότι μπορεί να υπολογισθεί με διαδοχικές απλές ολοκληρώσεις (μιας μεταβλητής) ως προς r και θ:

$$\iint_R f(r,\theta)\, dA = \int_{\theta=\boldsymbol{\alpha}}^{\theta=\boldsymbol{\beta}} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta) r \, dr d\theta \tag{3}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το R είναι φραγμένο πολικό χωρίο της μορφής

$$R = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] \text{ και } r \in [g_1(\theta), g_2(\theta)]\right\}.$$

Επίσης, ισχύουν όλες οι ιδιότητες που ισχύουν για τα καρτεσιανά διπλά ολοκληρώματα και αναφέρονται στις ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 1 καθώς και ο εξής τύπος υπολογισμού εμβαδού :

$$A(R) = \iint_R r\, dr d\theta \tag{4}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14 *Έστω D το χωρίο (δίσκος) που φράσσεται από τον κύκλο ακτίνας d. Σε πολικές συντεταγμένες το χωρίο D είναι ένα ορθογώνιο*

$$\Pi(D) = [0, 2\pi] \times [0, d]$$

όπου $\Pi(D)$ συμβολίζει το ίδιο χωρίο D εκπεφρασμένο σε πολικές συντεταγμένες. Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν $A(D)$ του δίσκου D δίνεται από το διπλό (καρτεσιανό) ολοκλήρωμα $\iint_D 1\, dxdy$

$$A(D) = \iint_D 1\, dydx = \int_{-d}^{d} \int_{-\sqrt{d^2-x^2}}^{\sqrt{d^2-x^2}} 1\, dydx$$

το οποίο ενέχει κάποια δυσκολία [1] *στον υπολογισμό του. Από την σχέση (4) έχουμε*

$$A\Big(\Pi(D)\Big) = \iint_{\Pi(D)} r\, dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=d} r\, dr d\theta.$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιά μέλος της παραπάνω σχέσης είναι εντελώς στοιχειώδες στον υπολογισμό του

$$\int_0^{2\pi} \int_0^d r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=d} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d^2}{2} d\theta = \left[\frac{d^2}{2} \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \pi d^2.$$

Το παραπάνω παράδειγμα καταδεικνύει ότι οι πολικές συντεταγμένες και η ολοκλήρωση ως προς αυτές είναι μια εναλλακτική δυνατότητα, ισοδύναμη με τις καρτεσιανές, που έχουμε και την χρησιμοποιούμε εφ΄ όσον διευκολύνει ή εξυπηρετεί τους υπολογισμούς μας και τους σκοπούς μας γενικότερα.

<u>Προσδιορισμός πολικών ορίων ολοκλήρωσης:</u> Η μεθοδολογία που χρησιμοποιούμε είναι ανάλογη με αυτήν στις καρτεσιανές συντεταγμένες. Συγκεκριμένα,

- Σχεδιάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης, ονομάζουμε τις καμπύλες και βρίσκουμε όλα τα εμπλεκόμενα σημεία τομής τους.

---

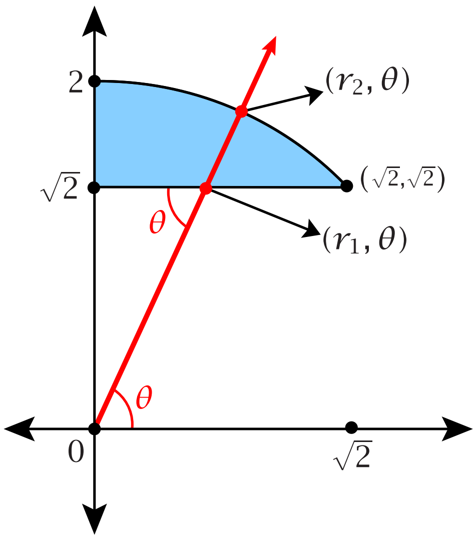
[1] $\int_{-d}^{d} \int_{-\sqrt{d^2-x^2}}^{\sqrt{d^2-x^2}} 1\, dydx = \int_{-d}^{d} 2\sqrt{d^2-x^2}\, dx = \begin{bmatrix} \text{μετασχ} \\ x = d\sin u \end{bmatrix} = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{d^2-x^2} + \frac{d^2}{4}\sin^{-1}\frac{x}{d} \right]_{x=-d}^{x=d} = \frac{d^2}{4}\sin^{-1}(1) - \frac{d^2}{4}\sin^{-1}(-1) = \frac{d^2}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{d^2}{2}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{d^2}{2}4\pi = \pi d^2.$

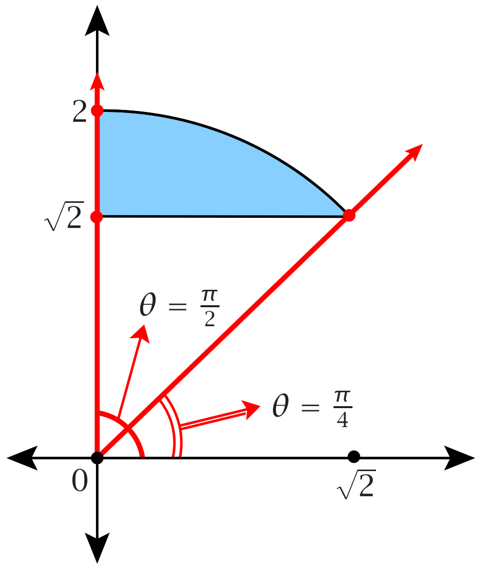
- Για τα όρια ολοκλήρωσης ως προς r, θεωρούμε ημιευθείες E που τέμνουν το χωρίο και σημειώνουμε τις τιμές του r που αντιστοιχούν στα σημεία εισόδου και εξόδου της E από το χωρίο. Οι τιμές αυτές εξαρτώνται από την γωνία θ που σχηματίζει η E με τον θετικό x-ημιάξονα (άρα είναι συναρτήσεις ως προς θ). Αυτά είναι τα όρια ολοκλήρωσης ως προς r.

- Τα όρια ολοκλήρωσης ως προς θ καθορίζονται από την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της γωνίας θ για τις οποίες η αντίστοιχη ημιευθεία E γωνίας θ τέμνει το χωρίο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15 *Έστω R το χωρίο που φράσσεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 2^2$, την ευθεία $y = \sqrt{2}$ και τον y-άξονα. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες το χωρίο αυτό περιγράφεται ως εξής*

$$\begin{aligned} R &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \left[\sqrt{2}, \sqrt{2^2 - x^2}\right] \text{ και } x \in [0, \sqrt{2}]\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left[0, \sqrt{2^2 - y^2}\right] \text{ και } y \in [\sqrt{2}, 2]\right\} \end{aligned}$$





Για να περιγράψουμε το χωρίο με πολικές συντεταγμένες, θεωρούμε ημιευθεία E που σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό x-ημιάξονα και η οποία τέμνει το χωρίο σε σημεία (r_1, θ) και (r_2, θ).

<u>Για το σημείο εξόδου</u>: αυτό έχει πολικές συντεταγμένες (r_2, θ) και ανήκει στην περιφέρεια του κύκλου ακτίνας 2, άρα $r_2 = 2$.

Για το σημείο εισόδου: αυτό έχει πολικές συντεταγμένες (r_1, θ) και το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $\left(0, \sqrt{2}\right)$ και (r_1, θ) είναι ορθογώνιο άρα

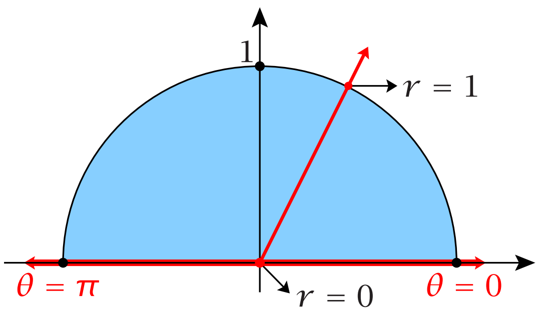
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{r_1} \Longrightarrow r_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta.}$$

Συνεπώς για κάθε γωνία θ που η αντίστοιχη ημιευθεία τέμνει το χωρίο έχουμε ότι το r έχει εύρος $\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta} \le r \le 2$.

Για να βρούμε τα όρια για το θ παρατηρούμε ότι η ημιευθεία E που σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό x-ημιάξονα τέμνει το χωρίο αν και μόνο αν $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Τελικά έχουμε ότι το χωρίο σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\Pi(R) = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta} \le r \le 2 \;\; \textit{και} \;\; \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16 *Υπολογισμός*[2] *του ολοκληρώματος* $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dxdy$ *όπου R ο ημιδίσκος ($y \ge 0$) κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1.*



Οι ακτίνες με γωνία $\theta \in [0,\pi]$ τέμνουν το χωρίο και για κάθε μία από αυτές όλα τα σημεία με $r \in [0,1]$ ανήκουν στο χωρίο. Συνεπώς το R σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\Pi(R) = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; o \le \theta \le \pi \;\; \textit{και} \;\; 0 \le r \le 1\right\}$$

Από την σχέση (3) έχουμε

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{\Pi(R)} e^{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^1 re^{r^2}\,dr\,d\theta.$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int re^{r^2}dr$ υπολογίζεται με αντικατάσταση ($w = r^2$) και έτσι έχουμε

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 re^{r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{\pi}\frac{e-1}{2}d\theta = \pi\frac{e-1}{2}.$$

[2] Σημειωτέον ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $\int e^{x^2}dx$ δεν δίνεται με κλειστό τύπο και άρα το ολοκλήρωμα $\iint_R e^{x^2+y^2}$, που είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην Στατιστική, δεν υπολογίζεται με χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17 *Μετατροπή του ολοκληρώματος*

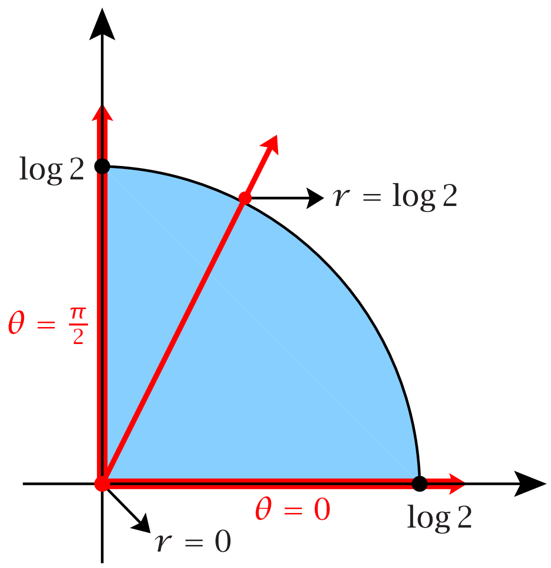
$$\int_0^{\log 2}\int_0^{\sqrt{(\log 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

σε πολικές συντεταγμένες.

Από τα όρια ολοκλήρωσης που αναγράφονται στο δοθέν διπλό ολοκλήρωμα έχουμε ότι το χωρίο ολοκλήρωσης R περιγράφεται με καρτεσιανές συντεταγμένες ως εξής

$$R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x\le \sqrt{(\log 2)^2-y^2} \text{ και } 0\le y\le \log 2\right\}.$$

Δηλαδή το R είναι το τμήμα του κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\log 2$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.



Οι ακτίνες με γωνία $\theta \in [0,\pi/2]$ τέμνουν το χωρίο και για κάθε μία από αυτές όλα τα σημεία με $r\in[0,\log 2]$ ανήκουν στο χωρίο. Συνεπώς το R σε πολικές συντεταγμένες είναι το (πολικό) ορθογώνιο

$$\Pi(R) = \left[0,\log 2\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2}\int_0^{\sqrt{(\log 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\log 2} e^r r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left[(r-1)e^r\right]_{r=0}^{r=\log 2}\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\log 2-1\right)d\theta = \left(2\log 2-1\right)\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Στα παρακάτω ολοκληρώματα σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης και αλλάξτε την σειρά ολοκλήρωσης

$$\text{(a)} \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2-x^2} y\,dy\,dx \quad \text{(b)} \int_0^2\int_0^{4-y^2} y\,dx\,dy \quad \text{(c)} \int_0^3\int_0^{\sqrt{\frac{x}{3}}} e^{y^3}\,dy\,dx$$

$$\text{(d)} \int_0^3\int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx \quad \text{(e)} \int_{-2}^1\int_{y-2}^{-y^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dx\,dy$$

$$\left[\text{Απ:} \begin{array}{cccccc} \text{(a)}: & {\scriptstyle 0\le x\le\sqrt{2-y} \atop 0\le y\le 2} & \text{(b)}: & {\scriptstyle 0\le y\le\sqrt{4-x} \atop 0\le x\le 4} & \text{(c)}: & {\scriptstyle 3y^2\le x\le 3 \atop 0\le y\le 1} \\ \text{(d)}: & {\scriptstyle 0\le x\le 3y^2 \atop 0\le y\le 1} & \text{(e)}: & {\scriptstyle -\sqrt{x}\le y\le x+2 \atop -4\le x\le -1} & & {\scriptstyle -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x} \atop -1\le x\le 0} \end{array}\right]$$

2. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από το γράφημα της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = 2 - x$. $\left[\text{Απ: } \frac{9}{2}\right]$

3. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x) = -x^2 - 2x$ και $g(x) = x^2 - 4$. [Απ: 9]

4. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την παραβολή $y^2 + x = 1$ και την ευθεία $y = x + 1$. $\left[\text{Απ: } \frac{9}{2}\right]$

5. Υπολογίστε και με τις δύο σειρές ολοκλήρωσης ($dxdy$ και $dydx$) το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης και τις ευθείες $x = 0, y = 0$ και $x = \log 2$.
[Απ: 1 και με τους δύο τρόπους]

6. Μετατρέψτε τα παρακάτω ολοκληρώματα σε ισοδύναμα ολοκληρώματα με πολικές συντεταγμένες

$$\text{(a)} \int_{-3}^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy\,dx \quad \text{(b)} \int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad \text{(c)} \int_0^2\int_0^x y\,dy\,dx$$

$$\text{(d)} \int_0^2\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2dxdy \quad \text{(e)} \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$$\left[\text{Απ: } \text{(a)}: {\scriptstyle 0\le r\le 3 \atop 0\le\theta\le\pi} \quad \text{(b)}: {\scriptstyle 0\le r\le 1 \atop 0\le\theta\le 2\pi} \quad \text{(c)}: {\scriptstyle 0\le r\le\frac{2}{\cos\theta} \atop 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}} \quad \text{(d)}: {\scriptstyle 0\le r\le 2\sin\theta \atop \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi} \quad \text{(e)}: {\scriptstyle 0\le r\le 1 \atop 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}\right]$$