Συνοπτικές Σημειώσεις **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

Κεφάλαιο #3

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ - ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ LAGRANGE

ΤΟΠΙΚΑ ΜΕΓΙΣΤΑ, ΕΛΑΧΙΣΤΑ, ΣΑΓΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών που έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης. Επίσης, για λόγους απλότητας και μόνο, θεωρούμε το πεδίο ορισμού να είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$.

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ λέμε ότι έχει **τοπικό μέγιστο στο** $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ αν για κάθε (x,y) αρκετά κοντά στο (a,b) ισχύει $f(a,b) \geq f(x,y)$.

Η έννοια «αρκετά κοντά» μπορεί να περιγραφεί αυστηρά ως εξής: υπάρχει θετικός αριθμός ε έτσι ώστε για κάθε (x,y) που η Ευκλείδια απόσταση

$$|(x,y)-(a,b)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

είναι $< \varepsilon$ ισχύει $f(a,b) \geq f(x,y)$.

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ λέμε ότι έχει **τοπικό ελάχιστο στο** $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ αν για κάθε (x,y) αρκετά κοντά στο (a,b) ισχύει $f(a,b) \leq f(x,y)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν $f(x,y)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο (a,b) τότε $f_x(a,b)=0$ και $f_y(a,b)=0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Τα σημεία στα οποία αμφότερες οι μερικές παράγωγοι της f μηδενίζονται ονομάζονται **κρίσιμα σημεία** της f.
Ένα κρίσιμο σημείο της f λέγεται **σημείο καμπής (ή σαγματικό σημείο)** αν οσοδήποτε κοντά στο (a,b) υπάρχουν σημεία (x_1,y_1) και (x_2,y_2) ώστε να ισχύει $f(x_1,y_1) > f(a,b) > f(x_2,y_2)$.

Η έννοια «οσοδήποτε κοντά» μπορεί να περιγραφεί αυστηρά ως εξής: για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχουν σημεία (x_1,y_1) και (x_2,y_2) έτσι ώστε $|(x_1,y_1)-(a,b)| < \varepsilon$, $|(x_2,y_2)-(a,b)| < \varepsilon$ και $f(x_1,y_1) > f(a,b) > f(x_2,y_2)$.

Η ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{yx}(p) \\ f_{xy}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix}$ ονομάζεται **Εσσιανή ορίζουσα** της f στο p, συμβολίζεται με $H_f(p)$ και ισούται με

$$H_f(p) = f_{xx}(p)f_{yy}(p) - \big(f_{xy}(p)\big)^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω ότι η $f(x,y)$ έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης και p κρίσιμο σημείο της f.

Αν $H_f(p) > 0$ και $f_{xx}(p) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο p.
Αν $H_f(p) > 0$ και $f_{xx}(p) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο p.
Αν $H_f(p) < 0$ τότε το p είναι σαγματικό σημείο της f.

Παρατήρηση: Αν $H_f(p) = 0$ δεν υπάρχει κάποιο συμπέρασμα.

Παράδειγμα 1: Για την συνάρτηση $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατα ως εξής:

Οι μερικές παράγωγοι είναι $\begin{aligned} f_x &= y - 2x - 2 \\ f_y &= x - 2y - 2 \end{aligned}$ και $\begin{aligned} f_{xx} &= -2 \\ f_{yy} &= -2 \\ f_{xy} &= 1 = f_{yx} \end{aligned}$

Σημείωση: Όταν η f έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης τότε ισχύει πάντα η ισότητα $f_{xy} = f_{yx}$, συνεπώς, δεν χρειάζεται να υπολογίζουμε και την f_{xy} και την f_{yx} αλλά μόνο την μία από τις δύο.

Τα κρίσιμα σημεία είναι τα (a,b) για τα οποία ισχύει

$$\begin{aligned} f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b) &\iff [y - 2x - 2]_{(a,b)} = 0 = [x - 2y - 2]_{(a,b)} \\ &\iff b - 2a - 2 = 0 \text{ και } a - 2b - 2 = 0 \\ &\iff a = -2 \text{ και } b = -2. \end{aligned}$$

Για να εξετάσουμε αν στο μοναδικό κρίσιμο σημείο $(-2,-2)$ έχουμε τοπικό ακρότατο ή σημείο καμπής βρίσκουμε την Εσσιανή ορίζουσα:

$$H_f(-2,-2) = f_{xx}(-2,-2)f_{yy}(-2,-2) - \left(f_{xy}(-2,-2)\right)^2 = (-2)(-2) - 1^2 = 3 > 0$$

και αφού $f_{xx}(-2,-2) = -2 < 0$ η f έχει τοπικό μέγιστο στο $(-2,2)$.

Παράδειγμα 2: Για την συνάρτηση $f(x,y) = -2y^3 + 3y^2 - 3x^2 + 6xy$ βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατα ως εξής:

Οι μερικές παράγωγοι είναι $\begin{aligned} f_x &= -6x + 6y \\ f_y &= -6y^2 + 6y + 6x \end{aligned}$ και $\begin{aligned} f_{xx} &= -6 \\ f_{yy} &= -12y + 6 \\ f_{xy} &= 6 = f_{yx} \end{aligned}$

Για τα κρίσιμα σημεία έχουμε

$$\begin{aligned} -6x + 6y = 0 = -6y^2 + 6y + 6x &\iff 6x = 6y \quad \text{και} \quad y(-6y + 6 + 6) = 0 \\ &\iff (x,y) = (0,0) \quad \text{ή} \quad (x,y) = (2,2). \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την Εσσιανή

$$H_f = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6)(-12y+6) - 6^2 = 72(y-1)$$

και έχουμε

$H_f(0,0) = -72(0-1) = -72 < 0$ άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο

και

$H_f(2,2) = 72(2-1) = 72 > 0$ με $f_{xx}(2,2) = -6 < 0$ άρα στο $(2,2)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

Εφαρμογή: Ευθεία παρεμβολής - Ελάχιστα τετράγωνα

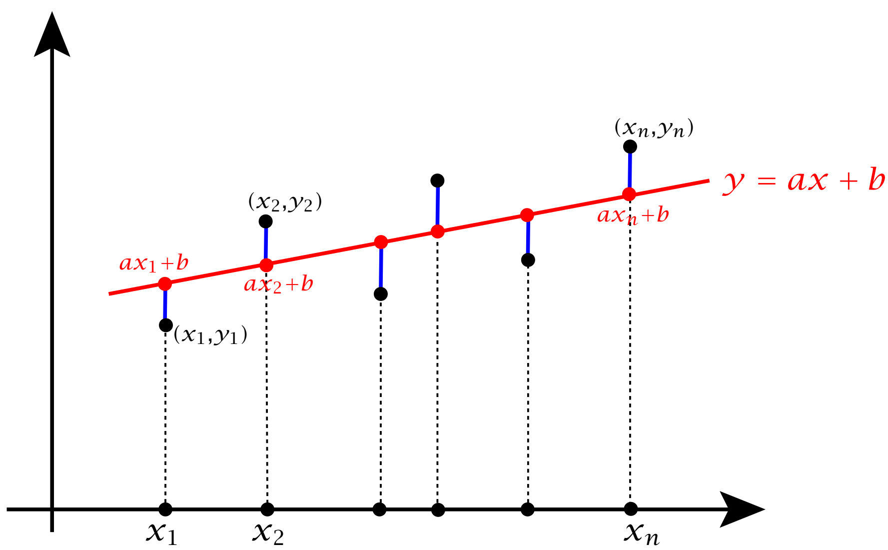
Όταν συλλέγουμε πειραματικά δεδομένα (μετρήσεις κλπ) είναι συχνά χρήσιμο να προσαρμόσουμε σε αυτά μία ευθεία η οποία, ως συνάρτηση, να προσεγγίζει κατά το δυνατόν ακριβέστερα τα πειραματικά δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε μία μεταβλητή x και ένα μέγεθος y το οποίο εξαρτάται από το x, δηλαδή, $y = y(x)$, και ας υποθέσουμε ότι για συγκεκριμένες τιμές

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

της μεταβλητής x διαθέτουμε μετρήσεις

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

για το μέγεθος y. Δοθέντων n σημείων $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ στο επίπεδο, αναζητούμε ευθεία $y = ax + b$ έτσι ώστε οι αποκλίσεις των τιμών που δίνει η ευθεία $(ax_i + b)$ από τις μετρήσεις y_i που έχουμε λάβει να είναι κατά το δυνατόν μικρότερες.



Με άλλα λόγια θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τις αποστάσεις των σημείων που έχουμε από τα αντίστοιχα σημεία επί της ζητούμενης ευθείας $y = ax + b$. Στο παραπάνω σχήμα θέλουμε η ευθεία $y = ax+b$ να είναι τέτοια ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των μπλε ευθυγράμμων τμημάτων να είναι ελάχιστο. Τα μήκη αυτά είναι

$$|ax_i + b - y_i|$$

και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των τετραγώνων τους

$$f(a,b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + \cdots + (ax_n + b - y_n)^2 .$$

Υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $f(a,b)$

$$\begin{aligned}
f_a &= 2\,(ax_1 + b - y_1)\,x_1 + \cdots + 2\,(ax_n + b - y_n)\,x_n \\
&= 2a\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) + 2b\,(x_1 + \cdots + x_n) - 2\,(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \\
&\overset{\text{Συμβ.}}{\equiv} 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_b &= 2\,(ax_1 + b - y_1) + \cdots + 2\,(ax_n + b - y_n) \\
&= 2a\,(x_1 + \cdots + x_n) + 2nb - 2\,(y_1 + \cdots + y_n) \\
&\overset{\text{Συμβ.}}{\equiv} 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{aa} &= 2\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) \overset{\text{Συμβ.}}{\equiv} 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
f_{bb} &= 2n \\
f_{ab} = f_{ba} &= 2\,(x_1 + \cdots + x_n) \overset{\text{Συμβ.}}{\equiv} 2\sum_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned}$$

Αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία της f λύνοντας το σύστημα $\left\{ \begin{array}{l} f_a = 0 \\ f_b = 0 \end{array} \right\}$:

$$f_b = 0 \Longrightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

και αντικαθιστώντας στην $f_a = 0$ βρίσκουμε

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - n\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}$$

Άρα υπάρχει μοναδικό κρίσιμο σημείο, το συμβολίζουμε με (a_0, b_0) για το οποίο προφανώς ισχύει $f_{aa}(a_0, b_0) > 0$ αφού $f_{aa} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ και για την

Εσσιανή ορίζουσα έχουμε

$$\begin{aligned}
H_f(a_0,b_0) &= 4n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\\
&= 4\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1,i<j}^{i=n-1}x_ix_j\right)\\
&= 4\left((n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1,i<j}^{i=n-1}x_ix_j\right)\\
&= 4\sum_{i=1,i<j}^{i=n-1}(x_i-x_j)^2>0.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι κάνουμε μετρήσεις για διαφορετικές (προφανώς) τιμές της μεταβλητής x. Κατά συνέπεια, το κρίσιμο σημείο είναι τοπικό ελάχιστο και αφού είναι μοναδικό είναι και ολικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 3: Εφαρμόζουμε την παραπάνω μέθοδο για τα σημεία $(0,1),(3,2)$ και $(-1,1)$.

Έστω $y=ax+b$ η ζητούμενη ευθεία. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(a,b)=(b-1)^2+(3a+b-2)^2+(-a+b+1)^2$$

και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
f_a &= 2(3a+b-2)\,3+2(-a+b+1)(-1)\\
&= 20a+4b-14
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_b &= 2(b-1)+2(3a+b-2)+2(-a+b+1)\\
&= 4a+6b-4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{aa} &= 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2=2\left(0^2+3^2+(-1)^2\right)=20\\
f_{bb} &= 2\cdot 3=6\\
f_{ab}=f_{ba} &= 2(0+3-1)=4
\end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα $\left\{\begin{array}{c} f_a=0\\ f_b=0\end{array}\right\}\equiv\left\{\begin{array}{c}10a+2b=7\\ 2a+3b=4\end{array}\right\}$ και βρίσκουμε το μοναδικό κρίσιμο σημείο $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

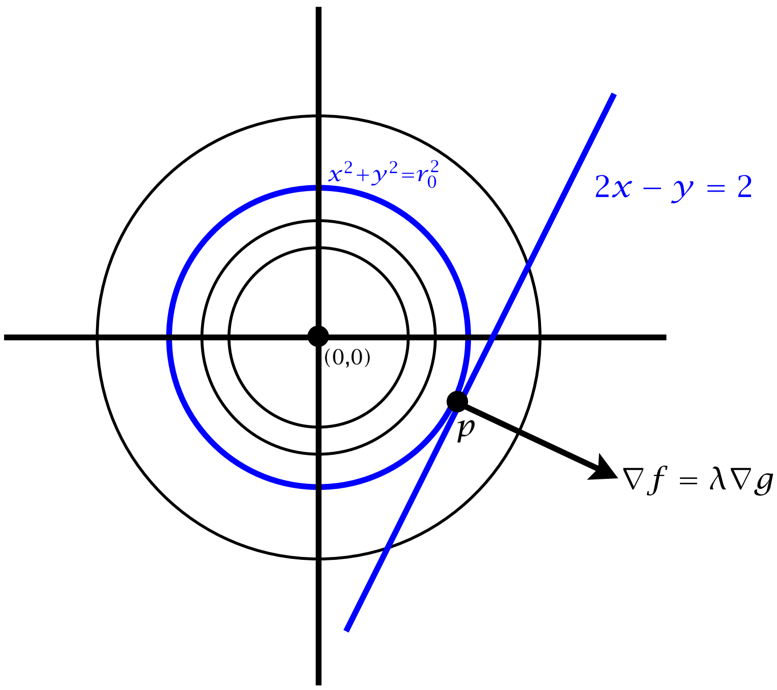
Επαληθεύουμε την θετικότητα της Εσσιανής ορίζουσας που αποδείξαμε στην γενική περίπτωση

$$H_f\left(\tfrac{1}{2},1\right) = f_{aa}\left(\tfrac{1}{2},1\right) f_{bb}\left(\tfrac{1}{2},1\right) - \left(f_{ab}\left(\tfrac{1}{2},1\right)\right)^2 = 120 - 16 = 104$$
$$= 4\sum_{i=1,i<j}^{i=2}(x_i - x_j)^2 = 4\Big((0-3)^2 + (0-(-1))^2 + (3-(-1))^2\Big) = 4\cdot 26 = 104$$

και συνεπώς στο σημείο $\left(\frac{1}{2},1\right)$ η $f(a,b)$ έχει ολικό ελάχιστο και η ζητούμενη ευθεία είναι $y = \frac{a}{2} + 1$.

Πολλαπλασιαστες Lagrange

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange μας επιτρέπει να βρούμε τα α-κρότατα μιας συνάρτησης $f(x,y,z)$ όταν οι μεταβλητές x,y,z ικανοποιούν μια συνθήκη/περιορισμό της μορφής $g(x,y,z) = 0$.
Θα περιγράψουμε την μέθοδο με ένα παράδειγμα στις 2 διαστάσεις.
Παράδειγμα 4: Έστω η ευθεία $2x - y = 2$ του επιπέδου και αναζητούμε το σημείο της ευθείας που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων $(0,0)$.
Η απόσταση ενός σημείου (x,y) από το $(0,0)$ δίνεται από τον τύπο $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Δηλαδή αναζητούμε τα σημεία της ευθείας $2x-y = 2$ για τα οποία η συνάρτηση $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή.



Όμως, η ποσότητα $\sqrt{x^2+y^2}$ είναι ελάχιστη ακριβώς όταν η ποσότητα $x^2 + y^2$ είναι ελάχιστη. Άρα, για λόγους ευκολίας στις παραγωγίσεις και μόνο, αντικαθιστούμε την συνάρτηση $h(x,y)$ με την συνάρτηση $f(x,y)=x^2+y^2$. Θέτουμε $g(x,y)=2x-y-2$ και το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στο εξής:

> Εύρεση της ελάχιστης τιμής της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^2$ όταν τα (x,y) ικανοποιούν την συνθήκη $g(x,y)=2x-y-2=0$.

Θεωρούμε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο το $(0,0)$ και αυξανόμενη ακτίνα. Κάποιος από αυτούς τους κύκλους με ακτίνα r_0 θα εφάπτεται στην ευθεία $2x-y-2$ σε ένα μοναδικό σημείο $p=(x_0,y_0)$. Προφανώς αυτό το σημείο της ευθείας απέχει ελάχιστη απόσταση από το $(0,0)$, με άλλα λόγια, στο σημείο $p=(x_0,y_0)$ της ευθείας η συνάρτηση $f(x,y)=x^2+y^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή.

Όμως, επειδή η ευθεία $g(x,y)=2x-y-2=0$ και ο κύκλος $f(x,y)=x^2+y^2=r_0^2$ εφάπτονται στο σημείο (x_0,y_0) θα πρέπει τα κάθετα διανύσματα να είναι συγγραμμικά. Δηλαδή, θα πρέπει να υπάρχει $\lambda \neq 0$ έτσι ώστε $\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)$. Άρα το ζητούμενο σημείο ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0) \quad \text{και} \quad g(x_0,y_0)=2x_0-y_0-2=0$$

δηλαδή είναι λύση του συστήματος $\left\{\begin{array}{c}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=0\end{array}\right\}$.

Από την πρώτη σχέση έχουμε $(2x,2y)=\lambda(2,-1)\Longrightarrow x=\lambda, y=-\frac{\lambda}{2}$.

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη σχέση έχουμε

$$2\lambda+\frac{\lambda}{2}=2\Longrightarrow\lambda=\frac{4}{5}$$

και το ζητούμενο σημείο στην ευθεία $2x-y=2$ που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων $(0,0)$ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{4}{5},-\frac{4}{10}\right)$.

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange για την εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης $f(x,y,z)$ όταν τα x,y,z ικανοποιούν την συνθήκη $g(x,y,z)=0$ **περιγράφεται συνοπτικά** ως εξής:

> Θεωρούμε το σύστημα $\left\{\begin{array}{c}\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)\\ g(x,y,z)=0\end{array}\right\}$ η επίλυση του οποίου μας δίνει τα σημεία (x,y,z) στα οποία η συνάρτηση $f(x,y,z)$ έχει ακρότατα. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας γεωμετρικούς ή φυσικούς συλλογισμούς εξετάζουμε αν σε αυτά τα σημεία η συνάρτηση $f(x,y,z)$ έχει μέγιστο ή ελάχιστο.

Παράδειγμα 4: Βρείτε τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z που ικανοποιούν την συνθήκη $x + y + z^2 = 16$ έτσι ώστε το γινόμενό τους να είναι μέγιστο.

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x, y, z) = xyz$ όταν ισχύει η συνθήκη $g(x, y, z) = x + y + z^2 - 16 = 0$. Άρα έχουμε το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ x + y + z^2 - 16 = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (f_x, f_y, f_z) = \lambda \left(g_x, g_y, g_z \right) \\ x + y + z^2 - 16 = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (yz, xz, xy) = \lambda \left(1, 1, 2z\right) \\ x + y + z^2 - 16 = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} yz = \lambda,\ xz = \lambda,\ xy = \lambda 2z \qquad (\star) \\ x + y + z^2 - 16 = 0 \end{array} \right\}$$

Αν $\lambda = 0$ τότε, από τις σχέσεις $(\star)$, αναγκαστικά 2 από τους 3 αριθμούς x, y, z είναι $= 0$ και έχουμε τις εξής 3 λύσεις, $(16, 0, 0)$ ή $(0, 16, 0)$ ή $(0, 0, 4)$, οι οποίες απορρίπτονται διότι αναζητούμε την μέγιστη τιμή του γινομένου xyz.

Αν $\lambda \neq 0$ τότε διαιρώντας ανά δύο τις σχέσεις $(\star)$, βρίσκουμε

$$x = y \quad \text{και} \quad z = \frac{y^2}{2}.$$

Αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις στην συνθήκη $x+y+z^2-16 = 0$ βρίσκουμε

$$x = y = \frac{32}{5} \quad \text{και} \quad z = \sqrt{\frac{32}{10}}.$$

Άρα στο σημείο $(x, y, z) = \left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}, \sqrt{\frac{32}{10}} \right)$ το γινόμενο xyz λαμβάνει την μέγιστη τιμή του.

Παρατήρηση: Η υπόθεση $x, y, z \geq 0$ είναι απαραίτητη διότι, αν επιτρέψουμε αρνητικούς αριθμούς, η συνάρτηση $f(x, y, z) = xyz$ είναι μη φραγμένη. Π.χ. για κάθε $M \in \mathbb{N}$ οι αριθμοί $x = M, y = -M$ και $z = -4$ ικανοποιούν την συνθήκη $x + y + z^2 - 16 = M - M + 4^2 - 16 = 0$ και το γινόμενό τους είναι $f(x, y, z) = 4M^2$.

Παράδειγμα 5: Από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που είναι εγγεγραμμένα στον μοναδιαίο κύκλο, βρείτε αυτό με το μέγιστο εμβαδό.

Οι κορυφές ενός ορθογωνίου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο θα έχουν καρτεσιανές συντεταγμένες $(a, b), (-a, b), (-a, -b), (a, -b)$ και θα ισχύει $g(a, b) = a^2 + b^2 - 1 = 0$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι a, b θετικοί αριθμοί. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι

$$f(a, b) = 2a \cdot 2b = 4ab.$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, αναλύουμε πρώτα την σχέση

$$\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b) \Longrightarrow (f_a, f_b) = \lambda \left(g_a, g_b\right) \Longrightarrow (4b, 4a) = \lambda\,(2a, 2b)$$

και έχουμε $\left\{\begin{array}{l} 4b = 2\lambda a \\ 4a = 2\lambda b \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda = \pm 2$ και από την υπόθεση $a, b > 0$ έχουμε $\lambda = 2$ και άρα $a = b$.

Από την συνθήκη $a^2 + b^2 - 1 = 0$ βρίσκουμε $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, δηλαδή το τετράγωνο είναι το ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδό $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$.

Ασκήσεις

1. Για τις επόμενες συναρτήσεις βρείτε τα τοπικά μέγιστα, ελάχιστα και σαγματικά σημεία:

   $$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 3y^2 \;,\quad f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3 \;,\quad f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6.$$

   $$\left[\text{Απ:}\quad \begin{array}{c} f \text{ τοπ. ελάχιστο στο } (0,0) : H_f(0,0) = 8, f_{xx}(0,0) > 0 \\ \\ g \text{ τοπ. μέγιστο στο } (-1,-1) : H_g(-1,-1) = 27, g_{xx}(-1,-1) = -6 \\ (0,0) \text{ σημείο καμπής της } g : H_g(0,0) = -9 \\ \\ h \text{ τοπ. μέγιστο στο } \left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) : H_h\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = 12, h_{xx}\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = -4 \\ (0,0) \text{ σημείο καμπής της } h : H_h(0,0) = -4 \end{array}\right]$$

2. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = 3x + 4y$ επί του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Απ: $\lambda = \pm\frac{5}{2}$ και $f\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right) = -5, f\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) = 5$

3. Εξ όλων των πραγματικών αριθμών x, y, z που έχουν άθροισμα 3 να βρείτε αυτούς με το ελάχιστο άθροισμα κύβων.

   Απ: $\lambda = 3$ ή 27 και $f(-3,-3,3) = f(3,-3,-3) = f(-3,3,-3) = -27$