ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εργαστήριο #10

Ονοματεπώνυμο	
Αριθμός Μητρώου	
Τμήμα	

1. Βρείτε 3 διαφορετικές παραμετρήσεις $r_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2, i = 1,2,3$ για το τμήμα του γραφήματος της $f(x) = x^3 + 1$ από το σημείο $(0,1)$ έως το σημείο $(1,2)$.
Υπάρχει παραμέτρηση με πεδίο ορισμού το $[0,2]$?

$1'$. Όμοια για την συνάρτηση $g(x) = x^2/2$ από το σημείο $(0,0)$ έως το σημείο $(2,2)$.

2. Να βρεθεί μία παραμέτρηση για το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $A = (a_1, a_2, a_3)$ και $B = (b_1, b_2, b_3)$ στον $\mathbb{R}^3$.

$2'$. Όμοια για τα σημεία $(1,2), (1,-3) \in \mathbb{R}^2$ και τα σημεία $(1,2,3), (0,-1,1) \in \mathbb{R}^3$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = x^3/y$ και η καμπύλη C να είναι το τμήμα του γραφήματος της $y = x^2/2$ από το σημείο $(0,0)$ έως το σημείο $(2,2)$. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της καμπύλης C.

$3'$. Όμοια για την συνάρτηση $f(x,y,z) = x + y + z$ και την καμπύλη C να είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(1,2,3), (0,-1,1) \in \mathbb{R}^3$.

$4'$. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x,y) = 3x + 2y$ κατά μήκος του τμήματος του κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 2 που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

1. Το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 1$ απαρτίζεται από όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ της μορφής $(x, f(x))$. Αυτό καθορίζει μία παραμέτρηση

$$r_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \;\text{ με }\; r_1(t) = \big(t, t^3+1\big)\,.$$

Αν $\rho : [a,b] \to [0,1]$ είναι μια οιαδήποτε συνεχής και αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση τότε η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "\rho"] \arrow[rr, bend left, "r_1\circ\rho"] & {[0,1]} \arrow[r, "r_1"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

είναι μια παραμέτρηση της καμπύλης. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$\rho : [0,2] \to [0,1] : \rho(s) = s/2$$

είναι 1-1 και επί και έτσι η σύνθεση

$$[0,2] \xrightarrow{\;r_1\circ\rho\;} \mathbb{R}^2 : (r_1\circ\rho)(s) = r_1(\rho(s)) = r_1\left(\tfrac{s}{2}\right) = \left(\tfrac{s}{2}, \left(\tfrac{s}{2}\right)^3 + 1\right)$$

είναι μια παραμέτρηση με πεδίο ορισμού το $[0,2]$.

Όμοια, οι συναρτήσεις $\rho_n : [0,1] \to [0,1], \rho_n(s) = s^n, n \in \mathbb{N}$ δίνουν παραμετρήσεις

$$r_n : [0,1] \xrightarrow{\;r_1\circ\rho_n\;} \mathbb{R}^2 : r_n(s) = (r_1\circ\rho_n)(s) = r_1(\rho_n(s)) = r_1(s^n)\left(s^n, (s^n)^3+1\right).$$

1′. Το γράφημα της συνάρτησης $g(x) = x^2/2$ απαρτίζεται από όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ της μορφής $(x, g(x))$ συνεπώς έχουμε την παραμέτρηση

$$r_1 : [0,2] \to \mathbb{R}^2 \;\text{ με }\; r_1(t) = \big(t, t^2/2\big)\,.$$

Οι συναρτήσεις $\rho, \sigma : [0,2] \to [0,2]$ με $\rho(t) = t^4/2^3$ και $\sigma(t) = t^6/2^5$ είναι 1-1 και επί και ορίζουν παραμετρήσεις

$$r_2(t) = (r_1\circ\rho)(t) = r_1\left(\frac{t^4}{2^3}\right) = \left(\frac{t^4}{2^3}, \frac{(t^4/2^3)^2}{2}\right) = \left(\frac{t^4}{2^3}, \frac{t^8}{2^7}\right)$$

και

$$r_3(t) = (r_1\circ\sigma)(t) = r_1\left(\frac{t^6}{2^5}\right) = \left(\frac{t^6}{2^5}, \frac{(t^6/2^5)^2}{2}\right) = \left(\frac{t^6}{2^5}, \frac{t^{12}}{2^{11}}\right).$$

2. Γνωρίζουμε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $A = (a_1, a_2, a_3)$ και είναι παράλληλη στην διεύθυνση του $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ είναι:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z(t) = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{array}\right\}$$

όπου $t \in \mathbb{R}$. Περιορίζοντας την παράμετρο t στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε την παραμέτρηση

$$\begin{aligned} r(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big) &= \Big(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), a_3 + t(b_3 - a_3)\Big) \\ &= \Big((1-t)a_1 + tb_1, (1-t)a_2 + tb_2, (1-t)a_3 + tb_3\Big) \\ &= (1-t)\,(a_1, a_2, a_3) + t\,(b_1, b_2, b_3) \\ &= (1-t)A + tB \end{aligned}$$

η οποία έχει αρχικό σημείο το $r(0) = (1-0)A + 0B = A$ και τελικό σημείο το $r(1) = (1-1)A + 1B = B$.

$2'$. Για τα σημεία $(1,2), (1,-3) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$\begin{aligned} r(t) &= (1-t)A + tB = (1-t)(1,2) + t(1,-3) \\ &= \big(1 - t + t, 2 - 2t - 3t\big) = (1, 2 - 5t) \end{aligned}$$

Για τα τα σημεία $(1,2,3), (0,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε

$$\begin{aligned} r(t) &= (1-t)A + tB = (1-t)(1,2,3) + t(0,-1,1) \\ &= \big(1 - t + 0, 2 - 2t - t, 3 - 3t + t\big) = \big(1 - t, 2 - 3t, 3 - 2t\big). \end{aligned}$$

3. Παραμέτρηση για την δοθείσα καμπύλη βρήκαμε στην άσκηση $1'$:

$$r_1 : [0,2] \to \mathbb{R}^2 \ \text{ με } \ r_1(t) = \big(t, t^2/2\big)\,.$$

Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας

$$\begin{aligned} r_1(t) &= (t, t^2/2) \\ r_1'(t) &= (1, t) \\ |r_1'(t)| &= \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \oint_{r_1} \frac{x^3}{y}\, ds &= \int_0^2 \frac{t^3}{t^2/2}\sqrt{1+t^2}\, dt = \int_0^2 2t\sqrt{1+t^2}\, dt \\ &= \left[\frac{2}{3}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{t=2} = \frac{2}{3}5^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\Big(5\sqrt{5} - 1\Big)\,. \end{aligned}$$

$3'$. Παραμέτρηση για την δοθείσα καμπύλη βρήκαμε στην άσκηση $2'$:

$$r(t) = \big(1 - t, 2 - 3t, 3 - 2t\big), t \in [0,1]$$

για την οποία έχουμε

$$|r'(t)| = |(-1,-3,-2)| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}.$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \oint_r (x + y + z)\ ds &= \int_0^1 \Big((1-t) + (2-3t) + (3-2t)\Big)\sqrt{14}\, dt \\ &= \sqrt{14}\int_0^1 \big(6 - 6t\big)\, dt = \sqrt{14}\left[6t - 3t^2\right]_{t=0}^{t=1} = 3\sqrt{14}. \end{aligned}$$

$4'$. Μια παραμέτρηση για τον κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 2 είναι

$$r(t) = (2\cos t, 2\sin t)\,, t \in [0, 2\pi].$$

Για το τμήμα του κύκλου στο πρώτο τεταρτημόριο έχουμε

$$r(t) = (2\cos t, 2\sin t)\,, t \in [0, \pi/2] \text{ με } |r'(t)| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2.$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned}
\oint_r (3x + 2y)\; ds &= \int_0^{\pi/2} \Big(6\cos t + 4\sin t\Big) 2\, dt \\
&= 12 \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt + 8 \int_0^{\pi/2} \sin t\, dt \\
&= 12\,[\sin t]_{t=0}^{t=\pi/2} + 8\,[-\cos t]_{t=0}^{t=\pi/2} \\
&= 12(1-0) - 8(0-1) = 20.
\end{aligned}$$