ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εργαστήριο #9

Ονοματεπώνυμο	
Αριθμός Μητρώου	
Τμήμα	

1. Γράψτε ένα ολοκλήρωμα που να ισούται με το μήκος του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \tan x, x \in [0, \pi/4]$.

$1'$. Όμοια για τις συναρτήσεις

$$f(x) = x^2, x \in [-1, 2] \text{ και } g(x) = \sin x, x \in [0, \pi/2].$$

($\star$) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $y^2 + 2y = 2x + 1$ από το σημείο $(-1, -1)$ έως το σημείο $(7, 3)$.

2. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $\sigma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right), t \in [0, 2\pi]$.

$2'$. Όμοια για την καμπύλη $\rho(t) = \left(t^3, \dfrac{3t^2}{2}\right), t \in [0, \sqrt{3}]$.

3. Υπολογίστε το μήκος του γραφήματος της συνάρτησης $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ όπου

$$f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} - 1.$$

$3'$. Όμοια για το γράφημα της $f : [1, 3] \to \mathbb{R}^2$ όπου

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}.$$

Λύσεις Ασκήσεων Εργαστηρίου #9

1. Για την παράγωγο $f'(x)$ γνωρίζουμε ότι $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2}\, dx.$$

1′. Για την παράγωγο $f'(x)$ γνωρίζουμε ότι $(x^2)' = 2x$ οπότε έχουμε

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{1+\left(2x\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{2} \sqrt{1+4x^2}\, dx.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται με τεχνικές αντικατάστασης

$$\int \sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{4}\left(2x\sqrt{4x^2+1} + \ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|\right) + C$$

και το αριθμητικό αποτέλεσμα είναι

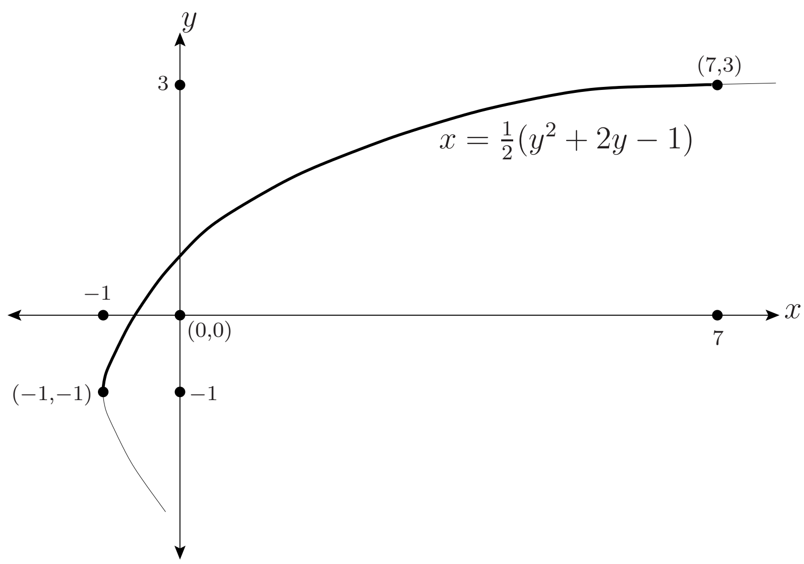
$$\sqrt{17} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(4+\sqrt{17}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(-2+\sqrt{5}\right).$$

Για την παράγωγο $g'(x)$ γνωρίζουμε ότι $(\sin x)' = \cos x$ οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+(\cos x)^2}\, dx.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό $\int \sqrt{1+(\cos x)^2}\, dx$ δεν υπολογίζεται με στοιχειώδεις μεθόδους.

($\star$) Έχουμε την παραβολή $x = \dfrac{y^2}{2} + y - \dfrac{1}{2}$ που έχει ακρότατο στο σημείο $(-1,-1)$.



Αφού $\dfrac{dx}{dy} = y+1$ το ζητούμενο μήκος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$L = \int_{-1}^{3} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_{-1}^{3} \sqrt{1+(y+1)^2}\, dy$$

το οποίο υπολογίζεται με μεθόδους αντικατάστασης και ισούται με $2\sqrt{17}+\frac{1}{2}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)$.

2. Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας

$$\begin{aligned}\sigma'(t) &= \big(3\cos^2 t(-\sin t), 3\sin^2 t\cos t\big)\\ |\sigma'(t)| &= \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}\\ &= 3\sqrt{\cos^2 t\sin^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\\ &= 3\left|\cos t\sin t\right|\end{aligned}$$

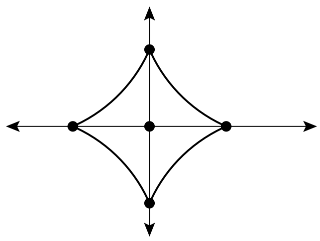
και το μήκος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$L(\sigma) = \int_0^{2\pi} 3\left|\cos t\sin t\right|\, dt.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα θα πρέπει να απαλειφθεί η απόλυτος τιμή.

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $t \in [0, \pi/2]$ και οι δύο τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι μη αρνητικοί άρα ισχύει $|\cos t\sin t| = \cos t\sin t$ οπότε

$$\begin{aligned}L_1 &= \int_0^{\pi/2} 3\left|\cos t\sin t\right|\, dt = \int_0^{\pi/2} 3\cos t\sin t\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\, dt\\ &= \frac{3}{2}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = -\frac{3}{4}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$



Επειδή η καμπύλη είναι συμμετρική και ως προς τους δύο άξονες το συνολικό μήκος $L(\sigma)$ είναι

$$L(\sigma) = 4L_1 = 6.$$

2′. Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας

$$\begin{aligned}\rho'(t) &= (3t^2, 3t)\\ |\rho'(t)| &= \sqrt{9t^4 + 9t^2} = 3t\sqrt{t^2+1}\end{aligned}$$

και το μήκος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}L(\rho) &= \int_0^{\sqrt{3}} 3t\sqrt{t^2+1}\, dt = \qquad \left[u = t^2+1\right]\\ &= 3\left[\tfrac{1}{3}\left(t^2+1\right)^{3/2}\right]_{t=0}^{t=\sqrt{3}} = (3+1)^{3/2} - 1^{3/2} = 7.\end{aligned}$$

3. Για την παράγωγο $f'(x)$ έχουμε

$$f'(x) = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} - 1\right)' = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{3}{2}\,x^{1/2} = 2\sqrt{2x}$$

και το μήκος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\left(2\sqrt{2x}\right)^2}\,dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\,\frac{1}{8}\,(1+8x)^{3/2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12}\left(9^{3/2}-1\right) = \frac{26}{12}.
\end{aligned}
$$

3′. Για την παράγωγο $f'(x)$ έχουμε

$$
f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}\right)' = x^2 - \frac{1}{4x^2}
$$

και το μήκος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$
\begin{aligned}
L &= \int_1^3 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx \\
&= \int_1^3 \sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^3 \left|x^2+\frac{1}{4x^2}\right|\,dx \\
&= \int_1^3 \left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x}\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{53}{6}.
\end{aligned}
$$