ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εργαστήριο #8

Ονοματεπώνυμο	
Αριθμός Μητρώου	
Τμήμα	

1. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού Q που έχει βάση τον δίσκο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 2 στο xy-επίπεδο
$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2\right\}$$
και φράσσεται πάνω από την επιφάνεια $z = 4 - x^2 - y^2$.

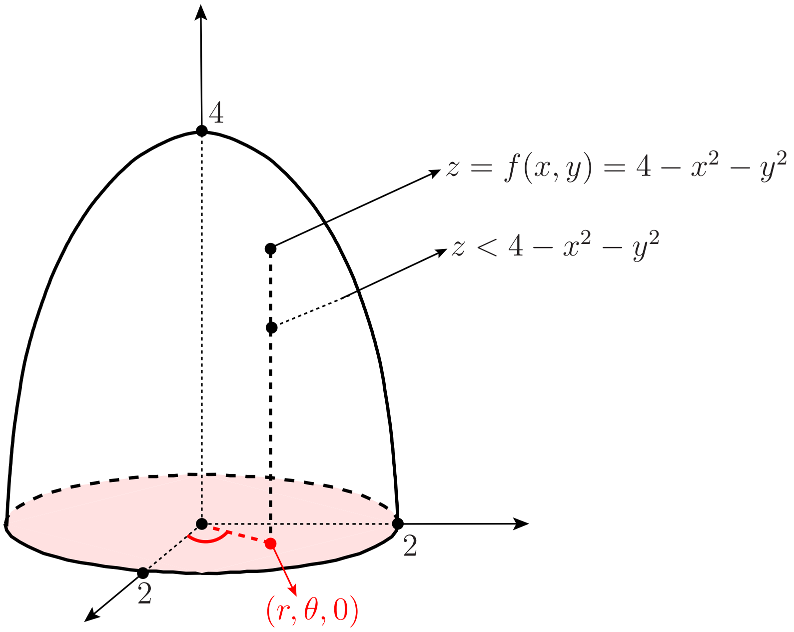
$1'$. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού Q που έχει βάση το ορθογώνιο $R = [0,2] \times [0,1]$ του xy-επιπέδου και φράσσεται πάνω από το επίπεδο $x + y + z = 4$.

2. Υπολογίστε τον όγκο του τετραέδρου T με κορυφές τα σημεία $(0,0,0), (2,2,0), (0,2,0)$ και $(0,2,1)$.

$2'$. Υπολογίστε τον όγκο του τετραέδρου T με κορυφές τα σημεία $(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0)$ και $(0,0,3)$.

3. Σε ένα ορθογώνιο τμήμα γης 3 στρεμμάτων (=3.000μ^2), εκπεφρασμένο σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως εξής
$$R = \left\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 75, 0 \leq y \leq 40\right\},$$
γνωρίζουμε ότι η συνολική βροχόπτωση σε χιλιοστά βροχής το τελευταίο εξάμηνο δίνεται από την συνάρτηση $f(x,y) = 4xy$.
Ποιός ο συνολικός όγκος νερού (σε κυβικά μέτρα) που έπεσε στο έδαφος;

1. Η συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ είναι θετική επί του δίσκου $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2\right\}$ και το γράφημά της είναι η επιφάνεια που φράσσει (άνω) το στερεό.

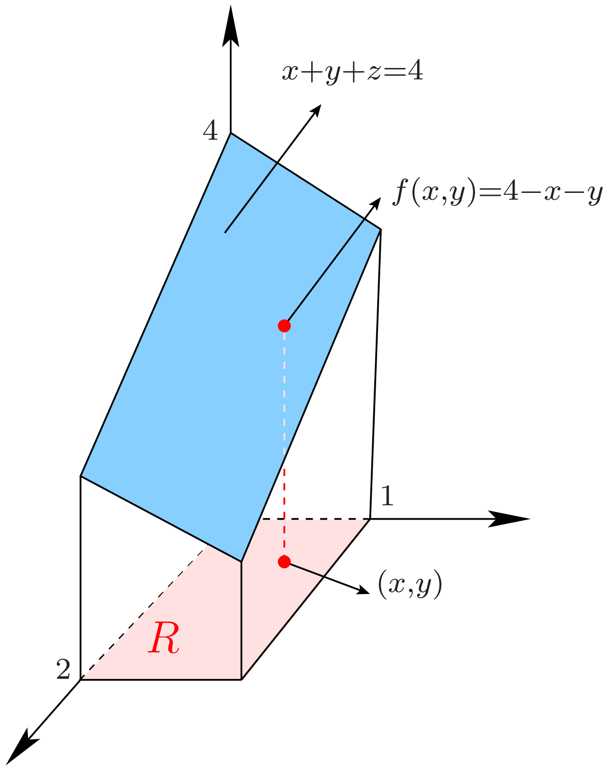


Συνεπώς ο ζητούμενος όγκος δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ επί του δίσκου D και έχουμε

$$
\begin{aligned}
V(Q) &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{2^2-x^2}}^{\sqrt{2^2-x^2}} \left(4 - x^2 - y^2\right) dydx \\
\left[\begin{array}{c}\text{Μετατροπή σε}\\ \text{πολικές}\end{array}\right] &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4 - (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2\right) r\,drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2) r\,drd\theta = \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (8-4)\,d\theta = 8\pi.
\end{aligned}
$$

$1'$. Λύνοντας την εξίσωση του επιπέδου $x + y + z = 4$ ως προς z, έχουμε ότι η συνάρτηση

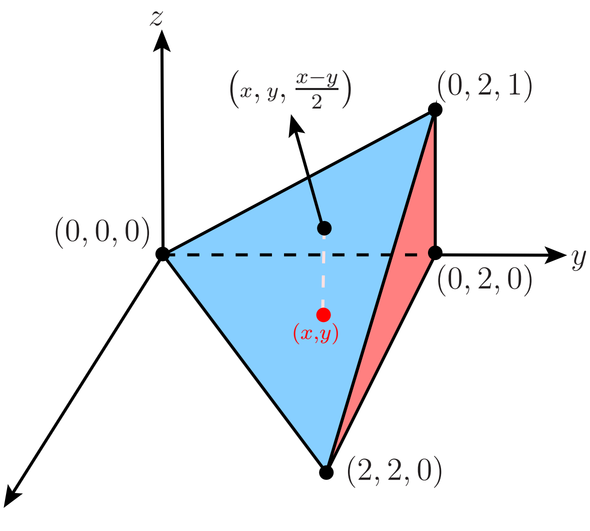
$$f : [0,2] \times [0,1] \to \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = 4 - x - y$$



έχει γράφημα ακριβώς το τμήμα του επιπέδου $x+y+z=4$ που βρίσκεται πάνω από το R (με μπλε σκίαση στο σχήμα). Ο ζητούμενος όγκος δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ επί του χωρίου R, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} V(Q) &= \iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_0^1 \Big(4-x-y\Big)\,dydx \\ &= \int_0^2 \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \Big(4-x-\frac{1}{2}\Big)\,dx \\ &= \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{14}{2} - \frac{4}{2} = 5. \end{aligned}$$

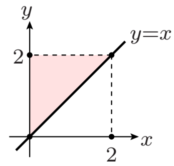
2. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τετράεδρο T το οποίο έχει βάση το τρίγωνο στο $xy-$επίπεδο



με κορυφές τα σημεία $(0,0,0)$, $(0,2,0)$ και $(2,2,0)$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y)

το χωρίο αυτό περιγράφεται ως εξής:

$$R := \left\{ \begin{array}{c} x \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{array} \right\}$$



Η έδρα του τετραέδρου που φράσσει (άνω) το στερεό (με μπλέ χρώμα στο σχήμα) είναι τμήμα του επιπέδου που περιέχει τα σημεία $(0,0,0)$, $(0,2,1)$ και $(2,2,0)$. Για να βρούμε την εξίσωση αυτού του επιπέδου αντικαθιστούμε στην γενική εξίσωση $ax+by+cz=d$ τις τιμές των σημείων και λύνουμε ως προς a, b, c, d :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0a+0b+0c &=& d \\ 0a+2b+c &=& d \\ 2a+2b+0c &=& d \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} d &=& 0 \\ c &=& -2b \\ a &=& -b \end{array} \right\}$$

Για $b=-1$ (τυχαία επιλογή) βρίσκουμε το επίπεδο $x-y+2z=0$.

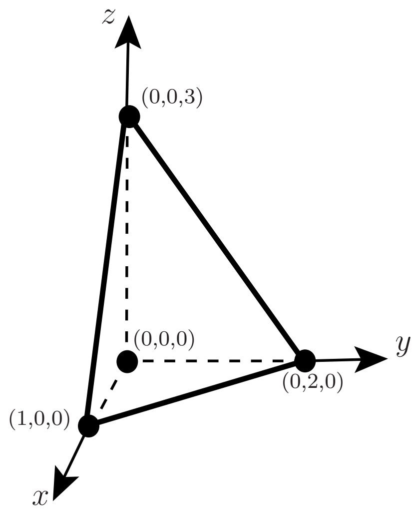
Τελικά το τετράεδρο T φράσσεται (άνω) από το γράφημα της συνάρτησης

$$f : R \to \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \frac{y-x}{2}$$

και ο όγκος του δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} V(T) &= \iint_R f(x,y)\,dA \;=\; \int_0^2 \int_x^2 \Big(\frac{y-x}{2}\Big)\,dydx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2}\right]_{y=x}^{y=2} dx \;=\; \int_0^2 \Big(1 - x + \frac{x^2}{4}\Big)\,dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right]_{x=0}^{x=2} \;=\; 2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{12} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$2'$. Υπολογίζουμε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται από τα σημεία $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ και $(0,0,3)$ αντικαθιστώντας στην γενική εξίσωση $ax+by+cz=d$ τις τιμές των παραπάνω

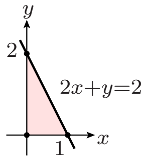


σημείων και λύνοντας ως προς a, b, c, d. Καταλήγουμε στις εξισώσεις $a = d, 2b = d, 3c = d$ και έτσι βρίσκουμε το επίπεδο

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

Το δοθέν τετράεδρο T έχει βάση το τρίγωνο στο $xy-$επίπεδο με κορυφές τα σημεία $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ και $(0, 2, 0)$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) το χωρίο αυτό περιγράφεται ως εξής:

$$R := \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq y \leq 2 - 2x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$



Τελικά το δοθέν τετράεδρο T φράσσεται (άνω) από το γράφημα της συνάρτησης

$$f : R \to \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = 3 - 3x - \frac{3y}{2}$$

και ο όγκος του δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} V(T) &= \iint_R f(x, y)\, dA \;=\; \int_0^1 \int_0^{2-2x} \Big(3 - 3x - \frac{3y}{2}\Big)\, dydx \\ &= \int_0^1 \left[(3 - 3x)y - \frac{3y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\ &= \int_0^1 \Big((3 - 3x)(2 - 2x) - \frac{3(2 - 2x)^2}{4}\Big)\, dx \\ &= \int_0^1 3(1 - x)^2\, dx \;=\; \Big[-(1 - x)^3\Big]_{x=0}^{x=1} \;=\; (1 - 0)^3 = 1. \end{aligned}$$

3. Ο συνολικός όγκος δίνεται από το ολοκλήρωμα $\iint_R 4xy\, dydx$. Αφού η μονάδα μέτρησης στο $xy-$επίπεδο είναι το μέτρο, για να το υπολογίσουμε, μετατρέπουμε τα χιλιοστά βροχής σε μέτρα: $1m = 10^3 mm$ άρα το ύψος βροχής σε μέτρα είναι $10^{-3}4xy$.

$$\begin{aligned} \int_0^{40} \int_0^{75} 10^{-3}4xy\, dxdy &= \int_0^{40} \Big(\int_0^{75} 10^{-3}4xy\, dx\Big)\, dy \;=\; \int_0^{40} \Big(\big[10^{-3}2x^2y\big]_{x=0}^{x=75}\Big)\, dy \\ &= \int_0^{40} 10^{-3}75^2 2y\; dy \;=\; 10^{-3}75^2\, \big[y^2\big]_{y=0}^{y=40} \;=\; 10^{-3}75^2 40^2 \\ &= \frac{3^2 5^4 2^6 5^2}{2^3 5^3} = 2^3 3^2 5^3 = 9.000 \text{ κυβικά μέτρα} \end{aligned}$$