ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εργαστήριο #6

Ονοματεπώνυμο	
Αριθμός Μητρώου	
Τμήμα	

1. Εκφράστε σε πολικές συντεταγμένες την καμπύλη $x^2 + y^2 = 2x$.

$1'$. Όμοια για την καμπύλη $x^2 + y^2 = 2^2$.

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_R e^{x^2+y^2} dxdy$ όπου το χωρίο R είναι ο άνω ημιδίσκος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\right\}$$

$2'$. Όμοια για το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_R e^{x^2+y^2} dxdy$ όπου το χωρίο R είναι το πρώτο τεταρτημόριο του δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 2:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2^2, x \geq 0, y \geq 0\right\}$$

3. Βρείτε, με χρήση πολικών συντεταγμένων, το εμβαδόν του τρίτου τεταρτημορίου του δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 2:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2^2, x \leq 0, y \leq 0\right\}$$

$3'$. Όμοια για το δεύτερο τεταρτημόριο $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 3^2, x \leq 0, y \geq 0\right\}$

Λύσεις Ασκήσεων Εργαστηρίου #6

1. Η καμπύλη $x^2+y^2=2x$ είναι ο κύκλος κέντρου $(1,0)$ και ακτίνας 1 διότι:

$$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2=0. \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

Ο μετασχηματισμός από καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) σε πολικές (r,θ) γίνεται με τις σχέσεις $\left\{ \begin{array}{c} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array} \right\}$

$$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=2r\cos\theta \Leftrightarrow r^2\left[(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right]=2r\cos\theta \Leftrightarrow r=2\cos\theta.$$

Δεδομένου ότι $r\geq 0$ και

$$\cos\theta\geq 0 \Longleftrightarrow \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

έχουμε τον περιορισμό $-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$.

1′. Η καμπύλη $x^2+y^2=2^2$ είναι, προφανώς, ο κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 2. Αντικαθιστώντας $\left\{ \begin{array}{c} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array} \right\}$ έχουμε

$$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=2^2 \Leftrightarrow r^2\left[(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right]=2^2 \Leftrightarrow r=\pm 2$$

και αφού $r\geq 0$ έχουμε ότι η εξίσωση του κύκλου σε πολικές συντεταγμένες είναι $r=2$ χωρίς κανένα περιορισμό για το θ, δηλαδή, $0\leq\theta\leq 2\pi$.

2. Το χωρίο R σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται

$$\Pi(R)=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ 0\leq\theta\leq\pi \text{ και } 0\leq r\leq 1\right\}$$

και το ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_{\Pi(R)} e^{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\,rdrd\theta=\int_0^\pi\int_0^1 re^{r^2}\,drd\theta.$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int re^{r^2}dr$ υπολογίζεται με την αντικατάσταση $w=r^2$

$$\int re^{r^2}\,dr=\left[\begin{array}{c} w=r^2 \\ dw=2rdr \end{array}\right]=\int\frac{1}{2}e^w\,dw=\frac{1}{2}e^w=\frac{1}{2}e^{r^2}.$$

Για το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_0^\pi\int_0^1 re^{r^2}\,drd\theta=\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=1}d\theta=\int_0^\pi\frac{e-1}{2}d\theta=\pi\frac{e-1}{2}.$$

2′. Το χωρίο R σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται

$$\Pi(R)=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ 0\leq\theta\leq\pi/2 \text{ και } 0\leq r\leq 2\right\}$$

και το ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{\Pi(R)} e^{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\,rdrd\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 re^{r^2}\,drd\theta.$$

Χρησιμοποιώντας το αόριστο ολοκλήρωμα $\int re^{r^2}\,dr = \frac{1}{2}e^{r^2}$ έχουμε

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^2 re^{r^2}\,drd\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{e^4-1}{2}d\theta = \pi\frac{e^4-1}{4}.$$

3. Το ζητούμενο εμβαδόν με χρήση καρτσιανών συντεταγμένων είναι

$$E = \iint_R 1\,dxdy = \int_{-2}^{0}\int_{\sqrt{2^2-x^2}}^{0} 1dydx.$$

Το χωρίο R σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται ως εξής:

$$\Pi(R) = \left\{(r,\theta)\ \middle|\ \pi \le \theta \le 3\pi/2 \text{ και } 0 \le r \le 2\right\}.$$

Το εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$E = \iint_{\Pi(R)} rdrd\theta = \int_\pi^{3\pi/2}\int_0^2 rdrd\theta = \int_\pi^{3\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \int_\pi^{3\pi/2} 2\,d\theta = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

$3'$. Για το δεύτερο τεταρτημόριο με χρήση καρτσιανών συντεταγμένων έχουμε

$$E = \iint_R 1\,dxdy = \int_{-3}^{0}\int_0^{\sqrt{3^2-x^2}} 1dydx$$

Το χωρίο R σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται ως εξής:

$$\Pi(R) = \left\{(r,\theta)\ \middle|\ \pi/2 \le \theta \le \pi \text{ και } 0 \le r \le 3\right\}.$$

Το εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$E = \iint_{\Pi(R)} rdrd\theta = \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^3 rdrd\theta = \int_{\pi/2}^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=3} d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{9}{2}\,d\theta = \frac{9\pi}{4}.$$