ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εργαστήριο #5

Ονοματεπώνυμο	
Αριθμός Μητρώου	
Τμήμα	

1. Για το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-x}} y^2 dydx$ σχεδιάστε την περιοχή ολοκήρωσης και αλλάξτε την σειρά ολοκλήρωσης.

$1'$. Όμοια για το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{xy} dxdy$.

2. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την παραβολή $y^2 + x = 1$ και την ευθεία $y = x + 1$.

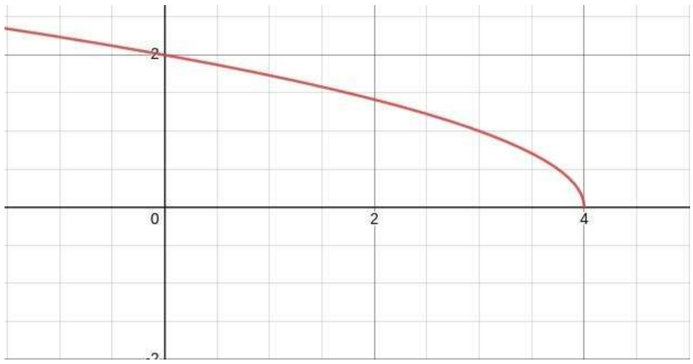
$2'$. Όμοια για το χωρίο που φράσσεται από την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = 2 - x$.

3. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης και τις ευθείες $x = 0, y = 0$ και $x = \ln 2$.

$3'$. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης και τις ευθείες $x = 0, y = 2$.

Λύσεις Ασκήσεων Εργαστηρίου #5

1. Τα όρια ολοκλήρωσης δίνονται από τις ανισότητες $0 \leq y \leq \sqrt{4-x}$ και $0 \leq x \leq 4$. Συνεπώς, το χωρίο φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $y = \sqrt{4-x}$ και των ευθειών $y=0$ και $x=0$.

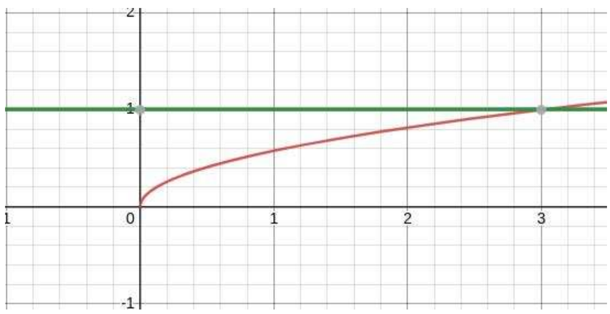


Στο χωρίο αυτό για την μεταβλητή y έχουμε την ανισότητα $0 \leq y \leq 2$ και για κάθε $y \in [0,2]$ η μεταβλητή x κινείται από 0 έως το x που ικανοποιεί την

$$y = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x = 4 - y^2$$

Άρα $0 \leq x \leq 4 - y^2$ και $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-x}} y^2 dydx = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} y^2 dxdy.$

1′. Τα όρια ολοκλήρωσης δίνονται από τις ανισότητες $0 \leq x \leq 3y^2$ και $0 \leq y \leq 1$. Συνεπώς, το χωρίο φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις της παραβολής $x = 3y^2$ και των ευθειών $y=1$ και $x=0$.



Στο χωρίο αυτό για την μεταβλητή x έχουμε την ανισότητα $0 \leq x \leq 3$ και για κάθε $x \in [0,3]$ η μεταβλητή y κινείται από σημείο που ικανοποιεί την

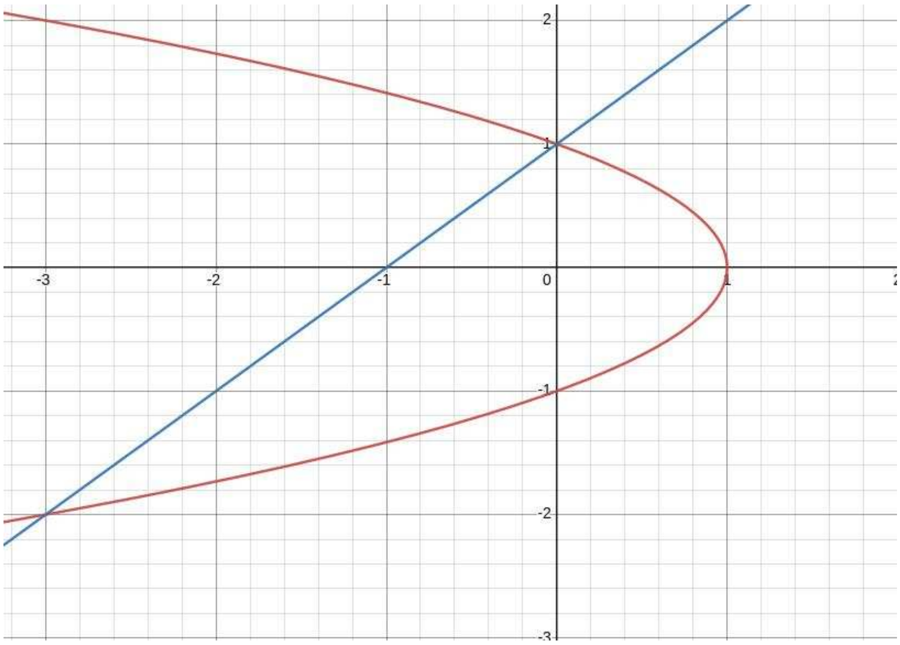
$$x = 3y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{x}{3}}$$

έως το 1. Άρα $\sqrt{\frac{x}{3}} \leq y \leq 1$ και $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{xy} dxdy = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{xy} dydx$

2. Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία τομής των $y^2 + x = 1$ και $y = x+1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} y^2 + x = 1 \\ y = x+1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x+1)^2 + x - 1 = 0 \\ y = x+1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 + 3x = 0 \\ y = x+1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} x = 0, -3 \\ y = x+1 \end{array}$$

Άρα τα σημεία τομής είναι τα $(0,1)$ και $(-3,-2)$.



Το χωρίο που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των $y^2 + x = 1$ και $y = x + 1$ οριοθετείται για την μεταβλητή y από το -2 έως 1.
Για τα $y \in [-2, 1]$ η μεταβλητή x φράσσεται κάτω από την $y = x + 1$, δηλαδή $y - 1 \leq x$ και άνω από την παραβολή $y^2 + x = 1$, δηλαδή $x \leq 1 - y^2$.

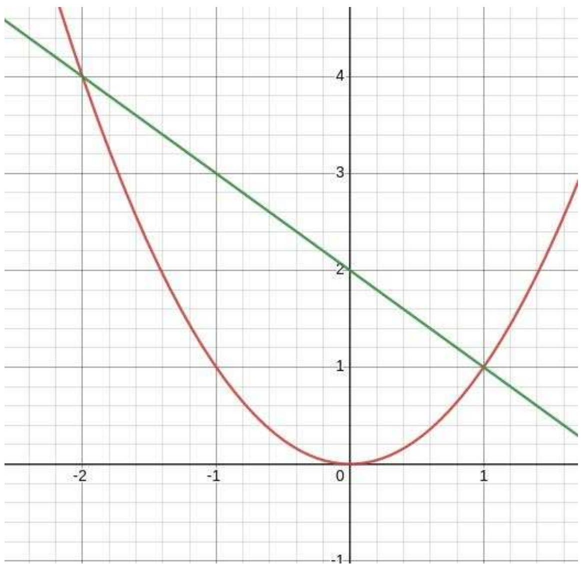
Άρα τα όρια ολοκλήρωσης είναι $-2 \leq y \leq 1$ και $y - 1 \leq x \leq 1 - y^2$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}\int_{y-1}^{1-y^2} 1dxdy &= \int_{-2}^{1}\left([x]_{x=y-1}^{x=1-y^2}\right)dy = \int_{-2}^{1}\big(1 - y^2 - (y-1)\big)\,dy \\ &= \int_{-2}^{1}\big(-y^2 - y + 2\big)\,dy = \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

$2'$. Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία τομής των $y = x^2$ και $y = 2 - x$:

$$\left\{\begin{array}{c} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2 - x = x^2 \\ y = 2 - x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 2 - x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} x = -2, 1 \\ y = 2 - x \end{array}$$

Άρα τα σημεία τομής είναι τα $(-2, 4)$ και $(1, 1)$.

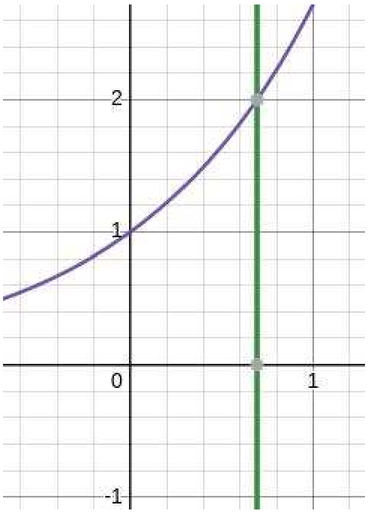


Το χωρίο που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των $y = x^2$ και $y = 2 - x$ οριοθετείται για την μεταβλητή x από το -2 έως 1.
Για τα $x \in [-2, 1]$ η μεταβλητή y φράσσεται κάτω από την $y = x^2$, δηλαδή $x^2 \leq y$ και άνω από την υθεία $y = 2 - x$, δηλαδή $y \leq 2 - x$..

Άρα τα όρια ολοκλήρωσης είναι $-2 \leq x \leq 1$ και $x^2 \leq y \leq 2 - x$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} 1 dydx &= \int_{-2}^{1}\left([y]_{y=x^2}^{y=2-x}\right)dx = \int_{-2}^{1}\left(2 - x - x^2\right)dy \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

3. Το χωρίο, που βοηθητικά και μόνο απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα,



οριοθετείται για την μεταβλητή x από τις ανισότητες $0 \leq x \leq \ln 2$. Αυτό το ξέρουμε διότι οι ευθείες $x = 0$ και $x = \ln 2$) φράσσουν το χωρίο.

Για την μεταβλητή y το χωρίο οριοθετείται από τις ανισότητες $0 \leq y \leq e^x$. Αυτό το ξέρουμε διότι η ευθεία $y = 0$ και το γράφημα της e^x φράσσουν το χωρίο.

Άρα τα όρια ολοκλήρωσης είναι $0 \leq x \leq \ln 2$ και $0 \leq y \leq e^x$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{e^x} 1 dydx &= \int_{0}^{\ln 2}\left([y]_{y=0}^{y=e^x}\right)dx = \int_{0}^{\ln 2}(e^x - 0)\,dy \\ &= [e^x]_{x=0}^{x=\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1.\end{aligned}$$

3$'$. Το χωρίο απεικονίζεται στο ίδιο παραπάνω σχήμα και οριοθετείται από τις ανισότητες $1 \leq y \leq 2$ και $0 \leq x \leq \ln y$. Υπολογίζουμε

$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{\ln y} 1 dxdy = \int_{1}^{2}\left([x]_{x=0}^{x=\ln y}\right)dy = \int_{1}^{2}\ln y\ dy = [y\ln y - y]_{y=0}^{y=\ln 2} = 2\ln 2 - 1.$$