ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εργαστήριο #4

Ονοματεπώνυμο	
Αριθμός Μητρώου	
Τμήμα	

1. Βρείτε τα τοπικά μέγιστα, ελάχιστα και σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$.

$1'$. Όμοια για την συνάρτηση $g(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$.

2. Μεταξύ των θετικών πραγματικών αριθμών x, y, z που έχουν άθροισμα 3, βρείτε αυτούς που έχουν το μέγιστο γινόμενο.

$2'$. Όμοια για αυτούς που έχουν μέγιστο άθροισμα τετραγώνων.

3. Ποιά η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y) = xy$ επί των σημείων της έλλειψης $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$;

$3'$. Ποιά η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y) = 3x + 4y$ επί των σημείων κύκλου $x^2 + y^2 = 1$;

$4'$. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που είναι εγγεγραμμένα στον μοναδιαίο κύκλο, βρείτε αυτό με το μέγιστο εμβαδό.

1. Βρίσκουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους $\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 2y \\ f_y &= -3y^2 - 2x \end{aligned}$ και $\begin{aligned} f_{xx} &= 6x \\ f_{yy} &= -6y \\ f_{xy} &= -2 = f_{yx} \end{aligned}$

Για τα κρίσιμα σημεία λύνουμε το σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array} \right\}$

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x^2 - 2y = 0 \\ 3y^2 + 2x = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} y = \frac{3}{2}x^2 \\ 3\left(\frac{3}{2}x^2\right)^2 + 2x = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x\left(\frac{3^3}{2^3}x^3 + 1\right) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x = 0 \ \text{ή} \ \ \frac{3^3}{2^3}x^3 + 1 = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x = 0 \ \text{ή} \ \ x^3 = -\frac{2^3}{3^3} \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x = 0 \ \text{ή} \ \ x = -\frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

Για $x = 0$ προκύπτει $y = 0$ και έχουμε το κρίσιμο σημείο $(0,0)$. Για $x = -\frac{2}{3}$ προκύπτει $y = \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$ και έχουμε το δεύτερο κρίσιμο σημείο $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Υπολογίζουμε την Εσσιανή

$$H_f = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 6x(-6y) - (-2)^2 = -36xy - 4$$

η οποία στα κρίσιμα σημεία $(0,0)$ και $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ λαμβάνει τις τιμές

$H_f(0,0) = -4 < 0$ άρα το $(0,0)$ είναι σημείο καμπής

και

$H_f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-6\frac{2}{3}\right) - 4 = 16 - 4 = 12 > 0$

με $f_{xx}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) = -4 < 0$, άρα στο $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

1′. Οι μερικές παράγωγοι είναι $\begin{aligned} g_x &= 3x^2 + 3y \\ g_y &= 3y^2 + 3x \end{aligned}$ και $\begin{aligned} g_{xx} &= 6x \\ g_{yy} &= 6y \\ g_{xy} &= 3 = g_{yx} \end{aligned}$

Για τα κρίσιμα σημεία λύνουμε το σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array} \right\}$

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} y = -x^2 \\ 3\left(-x^2\right)^2 + 3x = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} y = -x^2 \\ x\left(x^3 + 1\right) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} y = -x^2 \\ x = 0 \ \text{ή} \ \ x = -1 \end{array} \right\} \iff \begin{array}{c} x = 0 \ \text{και} \ \ y = 0 \\ \text{ή} \\ x = -1 \ \text{και} \ \ y = -1 \end{array}$$

Υπολογίζουμε την Εσσιανή

$$H_g = g_{xx}g_{yy} - (g_{xy})^2 = 6x6y - 3^2 = 36xy - 9$$

η οποία στα κρίσιμα σημεία $(0,0)$ και $(-1,-1)$ λαμβάνει τις τιμές

$$H_f(0,0) = -9 < 0 \text{ άρα το } (0,0) \text{ είναι σημείο καμπής για την } g$$

και

$$H_g(-1,-1) = 36 - 9 = 27 > 0 \text{ με } g_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$$

άρα στο $(-1,-1)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

2. Η συνάρτηση $f(x,y,z)$ που καλούμεθα να μεγιστοποιήσουμε είναι η $f(x,y,z) = xyz$ και η συνθήκη που πρέπει να πληρούν τα x, y, z είναι το άθροισμά τους να είναι 3, δηλαδή $g(x,y,z) = 0$ όπου $g(x,y,z) = x + y + z - 3$.
Λύνουμε το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (yz, xz, xy) = \lambda(1,1,1) \\ x + y + z = 3 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} yz = \lambda, xz = \lambda, xy = \lambda \\ x + y + z = 3 \end{array} \right\}$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις $yz = \lambda, xz = \lambda$ δίνουν

$$yz = \lambda = xz \Longrightarrow z(x-y) = 0 \Longrightarrow x = y \text{ ή } z = 0.$$

Όμως, η περίπτωση $z = 0$ αποκλείεται να μας δώσει μέγιστη τιμή για το γινόμενο $f(x,y,z) = xyz$. Άρα, έπεται ότι $x = y$.
Πανομοιότυπα, οι σχέσεις $yz = \lambda, xy = \lambda$ δίνουν $x = z$, και έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{c} x = y = z \\ x + y + z = 3 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = y = z \\ 3x = 3 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow x = y = z = 1.$$

$2'$. Η συνάρτηση $f(x,y,z)$ που καλούμεθα να μεγιστοποιήσουμε είναι η

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

με την ίδια συνθήκη $g(x,y,z) = x + y + z - 3 = 0$.
Λύνουμε το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (2x, 2y, 2z) = \lambda(1,1,1) \\ x + y + z = 3 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = y = z = \dfrac{\lambda}{2} \\ x + y + z = 3 \end{array} \right\}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή $\lambda/2$ στην δεύτερη εξίσωση έχουμε $\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 3 \Rightarrow \lambda = 2$ και άρα $x = y = x = \frac{\lambda}{2} = 1$. Δηλαδή, το άθροισμα τερταγώνων $x^2 + y^2 + z^2$ είναι μέγιστο όταν $x = y = z = 1$.

3. Για την $f(x,y)=xy$ επί των σημείων της έλλειψης $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ λύνουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla f=\lambda\nabla g\\[2mm] \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}-1=0\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{l}(y,x)=\lambda\left(\frac{x}{4},y\right)\\[2mm] \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}-1=0\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{l}y=\lambda\frac{x}{4}\ \text{ και }\ x=\lambda y\\[2mm] \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}-1=0\end{array}\right\}$$

Οι δύο πρώτες σχέσεις δίνουν $y=\lambda\dfrac{x}{4}=\lambda\dfrac{\lambda y}{4}\Rightarrow(4-\lambda^2)y=0$.
Το ενδεχόμενο $y=0$ μας δίνει το σημείο $(0,0)$ το οποίο απορρίπτεται διότι δεν ικανοποιεί την εξίσωση $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ (δηλ. δεν ανήκει στην έλλειψη).
Άρα $\lambda=\pm2$ και αντικαθιστώντας την $x=\pm2y$ στην εξίσωση της έλλειψης έχουμε

$$\frac{(\pm2y)^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0\iff\frac{4y^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\iff y=\pm1\ \text{ και }\ x=\lambda y=\pm2.$$

Άρα είναι 4 τα υποψήφια σημεία επί της δοθείσης ελλείψεως $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ στα οποία η $f(x,y)=xy$ μπορεί να έχει μέγιστο/ελάχιστο, τα εξής: $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$.
Στα δύο πρώτα η f λαμβάνει την μέγιστη τιμή της και στα άλλα δύο την ελάχιστη:

$$f(2,1)=f(-2,-1)=2\ \text{ και }\ f(2,-1)=f(-2,1)=-2.$$

3′. Για την $f(x,y)=3x+4y$ επί των σημείων του μοναδιαίου κύκλου λύνουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla f=\lambda\nabla g\\[2mm] x^2+y^2=1\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{l}(3,4)=\lambda\,(2x,2y)\\[2mm] x^2+y^2-1=0\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{l}x=\frac{3}{2\lambda}\ \text{ και }\ y=\frac{2}{\lambda}\\[2mm] x^2+y^2=1\end{array}\right\}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x,y στην εξίσωση του κύκλου έχουμε

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2=1\iff\frac{9}{4\lambda^2}+\frac{4}{\lambda^2}=1\iff\frac{25}{4}=\lambda^2\iff\lambda=\pm\frac{5}{2}.$$

Για $\lambda=\dfrac{5}{2}$ έχουμε $x=\dfrac{3}{2\lambda}=\dfrac{3}{2\left(\frac{5}{2}\right)}=\dfrac{3}{5}$ και $y=\dfrac{2}{\lambda}=\dfrac{2}{\frac{5}{2}}=\dfrac{4}{5}$.
Για $\lambda=-\dfrac{5}{2}$ έχουμε $x=\dfrac{3}{2\lambda}=\dfrac{3}{2\left(-\frac{5}{2}\right)}=-\dfrac{3}{5}$ και $y=\dfrac{2}{\lambda}=\dfrac{2}{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{4}{5}$.
Άρα, είναι 2 τα υποψήφια σημεία του μοναδιαίου κύκλου στα οποία η $f(x,y)=3x+4y$ μπορεί να έχει μέγιστο/ελάχιστο:

$$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\ \text{ και }\ \left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right).$$

Προφανώς, στο σημείο $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ η $f(x,y)=3x+4y$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή που είναι $f\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=3\left(\frac{3}{5}\right)+4\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{25}{5}=5$.
Στο σημείο $\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ η $f(x,y)=3x+4y$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή που είναι $f\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)=3\left(-\frac{3}{5}\right)+4\left(-\frac{4}{5}\right)=-5$.