ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εργαστήριο #3

Ονοματεπώνυμο	
Αριθμός Μητρώου	
Τμήμα	

1. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $f(x,y,z) = 2xy - yz$ στο σημείο $p = (1,-1,1)$ και στην κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (1,2,1)$.
   Όμοια για την συνάρτηση $g(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$ στο σημείο $q = (4,2,1)$ και στην κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (2,1,3)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$. Βρείτε τον μέγιστο και ελάχιστο ρυθμό μεταβολής της f στο σημείο $p = (1,2)$ καθώς και την κατεύθυνση στην οποία αυτό συμβαίνει. Σε ποιά κατεύθυνση ο ρυθμός μεταβολής είναι 0?
   Όμοια για την συνάρτηση $g(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$ στο σημείο $q = (4,2,1)$.

3. Για την συνάρτηση f της Άσκησης 1, υπάρχει κατεύθυνση $\overrightarrow{v}$ ως προς την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f στο $(1,-1,1)$ να είναι -3?
   Όμοια για την συνάρτηση g της Άσκησης 1, υπάρχει κατεύθυνση $\overrightarrow{v}$ ως προς την οποία ο ρυθμός μεταβολής της g στο $(4,2,1)$ να είναι -2?

4. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην επιφάνεια $z + 1 = xe^y$ στο σημείο $(1,0,0)$. Βρείτε επίσης την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην ίδια επιφάνεια στο ίδιο σημείο.
   Όμοια για την επιφάνεια $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz = 4$ στο σημείο $(3,-2,1)$.

5. Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2$ όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο με το επίπεδο $3x - y + 3z = 2$.
   Όμοια για την σφαίρα κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας 2 όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο με το επίπεδο $z = 5$.

1. $f(x,y,z) = 2xy - yz$, $p = (1,-1,1)$, $\overrightarrow{u} = (1,2,1)$.

$$\begin{aligned}\nabla f(p) &= \Big(f_x(p), f_y(p), f_z(p)\Big) = \Big([2y]_{(1,-1,1)}, [2x-z]_{(1,-1,1)}, [-y]_{(1,-1,1)}\Big) \\ &= \big(2\cdot(-1), 2\cdot 1 - 1, -(-1)\big) = (-2,1,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Df_{\overrightarrow{u}}(p) &= \nabla f(p)\cdot\frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} = (-2,1,1)\cdot\frac{(1,2,1)}{|(1,2,1)|} = \frac{(-2,1,1)\cdot(1,2,1)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} \\ &= \frac{-2+2+1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

$g(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$, $q = (4,2,1)$, $\overrightarrow{u} = (2,1,3)$.

$$\begin{aligned}\nabla g(q) &= \Big(g_x(q), g_y(q), g_z(q)\Big) = \left(\left[\frac{1}{y}\right]_{(4,2,1)}, \left[\frac{-x}{y^2}+\frac{1}{z}\right]_{(4,2,1)}, \left[\frac{-y}{z^2}\right]_{(4,2,1)}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{2^2}+\frac{1}{1}, -\frac{2}{1^2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Dg_{\overrightarrow{u}}(p) &= \nabla g(q)\cdot\frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} = \left(\frac{1}{2},0,-2\right)\cdot\frac{(2,1,3)}{|(2,1,3)|} = \frac{\left(\frac{1}{2},0,-2\right)\cdot(2,1,3)}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} \\ &= \frac{1+0-6}{\sqrt{14}} = \frac{-5}{\sqrt{14}}\end{aligned}$$

2. $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$, $p = (1,2)$.

$$\begin{aligned}\nabla f(p) &= \Big(f_x(1,2), f_y(1,2)\Big) = \left(\left[\frac{1}{x^2+y^2}2x\right]_{(1,2)}, \left[\frac{1}{x^2+y^2}2y\right]_{(1,2)}\right) \\ &= \left(\frac{2}{1^2+2^2}, \frac{4}{1^2+2^2}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)\end{aligned}$$

Το μέτρο της κλίσης της f στο $(1,2)$ είναι

$$|\nabla f(1,2)| = \left|\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Συνεπώς, ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής είναι $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ και λαμβάνει χώρα στην κατεύθυνση της κλίσης, δηλαδή στην κατεύθυνση $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ και ο ελάχιστος ρυθμός μεταβολής είναι $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ και λαμβάνει χώρα στην αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή, $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Ο ρυθμός μεταβολής είναι 0 στις κατευθύνσεις $\overrightarrow{v} = (a,b)$ που είναι εγκάρσιες στην κλίση, δηλαδή,

$$(a,b) \perp \nabla f(1,2) \iff (a,b) \cdot \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) = 0 \iff a\frac{2}{5} + b\frac{4}{5} = 0 \iff a = -2b.$$

Προφανώς οι κατευθύνσεις είναι ακριβώς δύο, $(-2,1)$ και η αντίθετή της $(2,-1)$, διότι βρισκόμαστε στο $\mathbb{R}^2$.

$$g(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z},\ q = (4,2,1).$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει

$$\nabla g(q) \;=\; \Big(g_x(4,2,1), g_y(4,2,1), g_z(4,2,1)\Big) = \left(\frac{1}{2}, 0, -2\right).$$

Το μέτρο της κλίσης της g στο $(4,2,1)$ είναι

$$|\nabla g(4,2,1)| = \left|\left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Συνεπώς, ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής είναι $\frac{\sqrt{17}}{4}$ και λαμβάνει χώρα στην κατεύθυνση της κλίσης, δηλαδή στην κατεύθυνση $\left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)$ και ο ελάχιστος ρυθμός μεταβολής είναι $-\frac{\sqrt{17}}{4}$ και λαμβάνει χώρα στην αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή, $\left(-\frac{1}{2}, 0, 2\right)$.

Ο ρυθμός μεταβολής είναι 0 στις κατευθύνσεις $\overrightarrow{v} = (a,b,c)$ που είναι εγκάρσιες στην κλίση, δηλαδή,

$$\begin{aligned}(a,b,c) \perp \nabla g(4,2,1) &\iff (a,b,c) \cdot \left(\frac{1}{2}, 0, -2\right) = 0 \\ &\iff a\frac{1}{2} + 0 + c(-2) = 0 \iff a - 4c = 0\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα (a,b,c) στον $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση απαρτίζουν ένα επίπεδο.

3. Υπολογίσαμε στην Άσκηση 1 το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(1,-1,1) = (-2,1,1)$ στο σημείο $(1,-1,1)$ το οποίο έχει μέτρο $|\nabla f(1,-1,1)| = |(-2,1,1)| = \sqrt{6}$.

   Συνεπώς, ο ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο $(1,-1,1)$ λαμβάνει όλες τις τιμές στο διάστημα $\left(-\sqrt{6}, +\sqrt{6}\right)$. Δεδομένου ότι $-3 < \sqrt{6}$, δεν υπάρχει κατεύθυνση ως προς την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f στο $(1,-1,1)$ να είναι -3.

   Επίσης, υπολογίσαμε στην Άσκηση 1 το διάνυσμα της κλίσης $\nabla g(4,2,1)$ στο σημείο $(4,2,1)$ το οποίο έχει μέτρο $|\nabla g(4,2,1)| = \left|\left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{2^2} + 2^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Συνεπώς, ο ρυθμός μεταβολής της g στο σημείο $(4,2,1)$ λαμβάνει όλες τις τιμές στο διάστημα $\left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, +\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$. Δεδομένου ότι το -2 ανήκει στο διάστημα αυτό, υπάρχει κατεύθυνση $\overrightarrow{v}$ ώστε $Dg_{\overrightarrow{v}}(4,2,1) = -2$. Προς τούτο, πρέπει και αρκεί το $\overrightarrow{v}$ να σχηματίζει με το διάνυσμα κλίσης $\left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)$ γωνία θ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} Dg_{\overrightarrow{v}}(4,2,1) = -2 \iff \quad & \nabla g(4,2,1) \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = -2 \\ \iff \quad & |\nabla g(4,2,1)| \cdot \left| \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} \right| \cos\theta = -2 \\ \iff \quad & \left| \left(\frac{1}{2}, 0, -2 \right) \right| \cdot 1 \cdot \cos\theta = -2 \\ \iff \quad & \frac{\sqrt{17}}{2} \cos\theta = -2 \iff \cos\theta = -\frac{4}{\sqrt{17}} \in (-1,1). \end{aligned}$$

4. Για την επιφάνεια $z + 1 = xe^y$ θεωρούμε την συνάρτηση $F(x,y,z) = xe^y - z$ και υπολογίζουμε την κλίση στο σημείο $(1,0,0)$:

$$\begin{aligned} \nabla F(1,0,0) &= \Big(F_x(1,0,0), F_y(1,0,0), F_z(1,0,0) \Big) \\ &= \Big([e^y]_{(1,0,0)}, [xe^y]_{(1,0,0)}, -1 \Big) = (1, 1, -1) \end{aligned}$$

Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο $(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ είναι

$$F_x(1,0,0)(x - \mathbf{1}) + F_y(1,0,0)(y - \mathbf{0}) + F_z(1,0,0)(z - \mathbf{0}) = 0$$

και με αντικατάσταση έχουμε $1(x-1) + 1(y-0) + (-1)(z-0) = 0 \iff x + y - z = 1.$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο σημείο $(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ είναι

$$x = \mathbf{1} + t, y = \mathbf{0} + t, z = \mathbf{0} - t, t \in \mathbb{R}.$$

Για την επιφάνεια $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz = 4$ θεωρούμε την συνάρτηση $G(x,y,z) = x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz$ και υπολογίζουμε την κλίση στο σημείο $(3,-2,1)$:

$$\begin{aligned} \nabla G(3,-2,1) &= \Big(G_x(3,-2,1), G_y(3,-2,1), G_z(3,-2,1) \Big) \\ &= \Big([2x + yz]_{(3,-2,1)}, [-4y + xz]_{(3,-2,1)}, [-6z + xy]_{(3,-2,1)} \Big) \\ &= \big(2 \cdot 3 + (-2) \cdot 1, (-4)(-2) + 3 \cdot 1, (-6) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \big) \\ &= (4, 11, -12) \end{aligned}$$

Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο $(\mathbf{3}, -\mathbf{2}, \mathbf{1})$ είναι

$$G_x(3,-2,1)(x - \mathbf{3}) + G_y(3,-2,1)(y - (-\mathbf{2})) + G_z(3,-2,1)(z - \mathbf{1}) = 0$$

και με αντικατάσταση έχουμε

$$4(x-3) + 11(y+2) - 12(z-1) = 0 \iff 4x + 11y - 12z = -22.$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο σημείο $(\mathbf{3}, -\mathbf{2}, \mathbf{1})$ είναι

$$x = \mathbf{3} + 4t, y = -\mathbf{2} + 11t, z = \mathbf{1} - 12t, t \in \mathbb{R}.$$

5. Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$ και η επιφάνεια $x^2+2y^2+3z^2 = 2$ είναι, προφανώς, η αντίστροφη εικόνα

$$F^{-1}(\{1\}) = \Big\{(x,y,z) \;\Big|\; F(x,y,z) = 2\Big\}.$$

Έστω σημείο $p = (p_1,p_2,p_3)$ της επιφάνειας. Το διάνυσμα $(3,-1,3)$ είναι εγκάρσιο στο επίπεδο $3x - y + 3z = 2$ και το διάνυσμα της κλίσης $\nabla F(p_1,p_2,p_3)$ είναι εγκάρσιο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο (p_1,p_2,p_3). Αφού ζητείται τα επίπεδα να είναι παράλληλα, πρέπει να ισχύει

$$\nabla F(p_1,p_2,p_3) = \lambda(3,-1,3) \tag{1}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Υπολογίζουμε πρώτα την κλίση

$$\begin{aligned}
\nabla F(p_1,p_2,p_3) &= \Big(F_x(p_1,p_2,p_3), F_y(p_1,p_2,p_3), F_z(p_1,p_2,p_3)\Big) \\
&= \Big([2x]_{(p_1,p_2,p_3)}, [4y]_{(p_1,p_2,p_3)}, [6z]_{(p_1,p_2,p_3)}\Big) \\
&= \big(2p_1, 4p_2, 6p_3\big).
\end{aligned}$$

Από την σχέση (1) έχουμε

$$\big(2p_1,4p_2,6p_3\big) = \big(3\lambda,-\lambda,3\lambda\big) \Longleftrightarrow p_1 = \frac{3\lambda}{2}, p_2 = \frac{-\lambda}{4}, p_3 = \frac{\lambda}{2}.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση της επιφάνειας βρίσκουμε το λ:

$$\left(\frac{3\lambda}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{-\lambda}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 = 2 \Longleftrightarrow \left(\frac{9}{4} + 2\frac{1}{16} + 3\frac{1}{4}\right)\lambda^2 = 2 \Longleftrightarrow \pm\frac{4}{5}.$$

Με αντικατάσταση στις σχέσεις $p_1 = \frac{3\lambda}{2}, p_2 = \frac{-\lambda}{4}, p_3 = \frac{\lambda}{2}$ βρίσκουμε τελικώς τα σημεία

$$(p_1,p_2,p_3) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \quad \text{ή} \quad (p_1,p_2,p_3) = \left(-\frac{6}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right).$$

Για την σφαίρα κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας 2 έχουμε ότι δίνεται από την εξίσωση $x^2+y^2+z^2 = 2^2$ ή από την σχέση

$$G(x,y,z) = 4$$

όπου G είναι η συνάρτηση $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.
Έστω σημείο $p = (p_1,p_2,p_3)$ της σφαίρας. Το διάνυσμα $(0,0,1)$ είναι εγκάρσιο στο επίπεδο $z = 5$ και το διάνυσμα της κλίσης $\nabla G(p_1,p_2,p_3)$ είναι εγκάρσιο στο εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας στο (p_1,p_2,p_3). Αναζητούμε τα σημεία (p_1,p_2,p_3) για τα οποία ισχύει

$$\nabla G(p_1,p_2,p_3) = \lambda(0,0,1) \tag{2}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\nabla G(p_1,p_2,p_3) &= \lambda\big(0,0,1\big) \\
\Big(G_x(p_1,p_2,p_3), G_y(p_1,p_2,p_3), G_z(p_1,p_2,p_3)\Big) &= \big(0,0,\lambda\big) \\
\Big([2x]_{(p_1,p_2,p_3)}, [2y]_{(p_1,p_2,p_3)}, [2z]_{(p_1,p_2,p_3)}\Big) &= \big(0,0,\lambda\big) \\
\big(2p_1, 2p_2, 2p_3\big) &= \big(0,0,\lambda\big) \quad \Longleftrightarrow \quad p_1 = p_2 = 0, p_3 = \tfrac{\lambda}{2}.
\end{aligned}$$

Άρα $p = (p_1,p_2,p_3) = \big(0,0,\frac{\lambda}{2}\big)$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση της σφαίρας έχουμε

$$0^2 + 0^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 = 2^2 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 4$$

και τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(0,0,2), (0,0,-2)$.