Ασκηση 1

Η απόσταση ενός σημείου $(x,y,z)$ από την αρχή των αξόνων είναι $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Άρα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ μέ συνθήκη $g(x,y,z)=x^2-z^2=1$.

Άρα έχουμε τό σύστημα $\begin{cases} \nabla f(x,y,z)=\lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z)=x^2-z^2=1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (2x,2y,2z)=\lambda(2x,0,-2z) \\ x^2-z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=2\lambda x,\ 2y=0,\ 2z=-2\lambda z \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

Άρα έχουμε 2 περιπτώσεις:

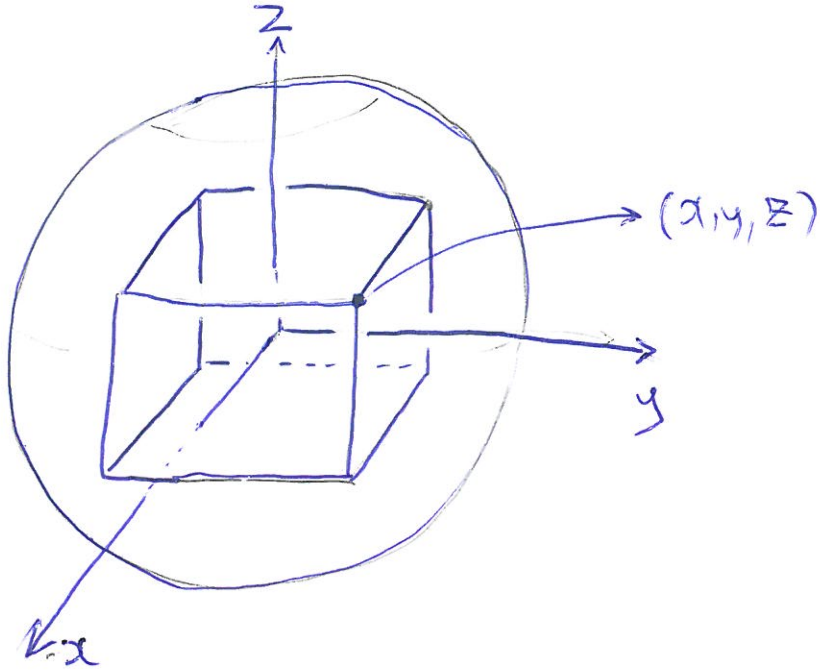
I) $y=0,\ \lambda=1,\ z=0$

Σ' αυτή την περίπτωση $y=0,\ x=\pm 1$. Άρα τα σημεία $(1,0,0)$ και $(-1,0,0)$ στην επιφάνεια $x^2-z^2=1$ απέχουν ελάχιστη απόσταση από το $(0,0,0)$

II) $y=0,\ \lambda=-1,\ x=0$

Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε $z^2=-1$ άτοπον. Δηλαδή αυτή ή περίπτωση δέν συμβαίνει.

# Άσκηση 3




Έστω $(x,y,z)$, $x>0$, $y>0$, $z>0$ η κορυφή του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που εγγράφεται στην μοναδιαία σφαίρα.

Τότε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι $2x, 2y, 2z$.

Άρα ο όγκος του ορθογωνίου είναι $f(x,y,z) = 8xyz$

Επίσης το σημείο $(x,y,z)$ ανήκει στην μοναδιαία σφαίρα άρα

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1.$$

Άρα θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x,y,z)$ όταν $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1$.

Άρα

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2 = 1 \end{aligned} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 8yz = 2\lambda x,\ 8xz = 2\lambda y,\ 8xy = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array} \right.$$

Διαιρώντας τις ισότητες έχουμε

$$\left| \begin{array}{l} \frac{y}{x} = \frac{x}{y},\ \frac{y}{z} = \frac{z}{y} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = y^2 = z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array} \Rightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα το ορθογώνιο είναι ένας κύβος.

## Ασκηση 4

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση

$T(x,y,z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$ όταν $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$

Αρα $\begin{array}{l} \nabla T(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16 \end{array}$ $(\Sigma) \Rightarrow$

$$(16x, 4z, 4y-16) = \lambda(8x, 2y, 8z) \Rightarrow \begin{cases} 16x = 8\lambda x \\ 4z = 2\lambda y \\ 4y - 16 = 8\lambda z \end{cases}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(1) $x \neq 0$.

Τότε $16x = 8\lambda x \Rightarrow \lambda = 2$. Αρα $y = z = -4/3$

Από την εξίσωση $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16 \Rightarrow x = \pm \frac{8}{6} = \pm \frac{4}{3}$

Αρα τα σημεία $\left(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ ικανοποιούν το $(\Sigma)$.

(2) $x = 0$.

Τότε διακρίνουμε 2 υποπεριπτώσεις:

(2α) $x = 0, \lambda = 0$

Τότε $x = 0, z = 0, y = 4$.

Παρατηρούμε ότι το σημείο $(0,4,0)$ ικανοποιεί το σύστημα $(\Sigma)$

(2β) $x=0$, $\lambda \neq 0$

τότε $y = \dfrac{4}{1-\lambda^2}$, $z = \dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2}$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $4x^2+y^2+4z^2=16$ και έχουμε

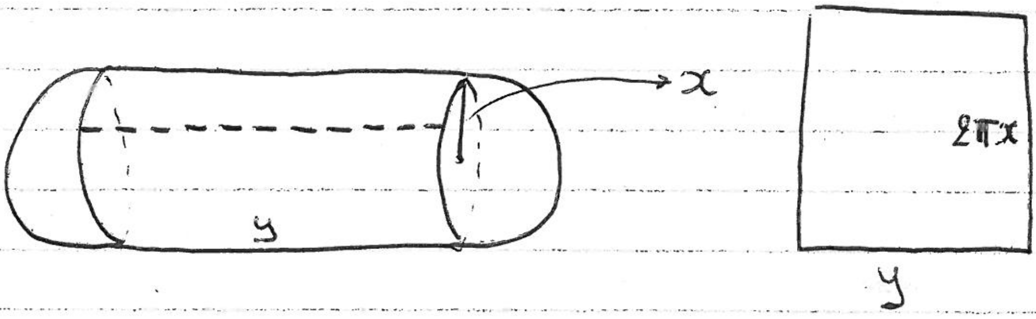
$$\left(\frac{4}{1-\lambda^2}\right)^2 + 4\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2 = 16 \Rightarrow \lambda^4 - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2-3) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$$

Άρα $y=-2$ και $z = \pm\sqrt{3}$.

Επομένως τα σημεία $(0,-2,\sqrt{3})$, $(0,-2,-\sqrt{3})$ ικανοποιούν το σύστημα $(\Sigma)$.

Τέλος από όλα τα σημεία $(x,y,z)$ που ικανοποιούν το σύστημα $(\Sigma)$ βρίσκουμε αυτό που μεγιστοποιεί την συνάρτηση $T(x,y,z)$.

Άσκηση 7.




Ο όγκος V της δεξαμενής ισούται με το άθροισμα του όγκου των 2 ημισφαιρίων συν το άθροισμα του κυλίνδρου στην μέση.

Τα 2 ημισφαίρια φτιάχνουν μία σφαίρα ακτίνας $x$ (δες σχήμα)

Άρα όγκος σφαίρας είναι $\frac{4}{3}\pi x^3$

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι βάση $\cdot$ ύψος $= \pi x^2 \cdot y$

Άρα ο συνολικός όγκος της δεξαμενής είναι $V = \frac{4}{3}\pi x^3 + \pi x^2 y$

Το εμβαδόν της πλευρικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $y \cdot 2\pi x$
(διότι αν κόψουμε και ανοίξουμε τον κύλινδρο κατά μήκος της διακεκομμένης γραμμής έχουμε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις $y$ και $2\pi x$)

Άρα αν θέσουμε $V = g(x,y) = \frac{4}{3}\pi x^3 + \pi x^2 y$

$$E = f(x,y) = 4\pi x^2 + 2\pi x y$$

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $f(x,y)$ όταν $g(x,y) = 8000$

Σημείωση: Το εμβαδόν $E$ της δεξαμενής είναι Εμβαδόν σφαίρας $= 4\pi x^2$

συν Εμβαδόν κυλίνδρου $= 2\pi x y$

Άρα έχουμε τις εξισώσεις

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \qquad \Rightarrow$$
$$g(x,y) = 8000$$

$$\begin{cases} (8\pi x + 2\pi y,\ 2\pi x) = \lambda (4\pi x^2 + 2\pi x y,\ \pi x^2) \\ \frac{4}{3}\pi x^3 + \pi x^2 y = 8000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8\pi x + 2\pi y = 4\pi \lambda x^2 + 2\pi \lambda x y \\ 2\pi x = \lambda \pi x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2\lambda x^2 + \lambda x y \\ 2x = \lambda x^2 \quad \lambda \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(2/\lambda) + y = 2\lambda\left(\frac{4}{\lambda^2}\right) + \lambda \frac{2}{\lambda} y \\ x = \frac{2}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2y \\ x = \frac{2}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2/\lambda \end{cases}$$

Άρα, επειδή $y=0$, δεν υπάρχει κυλινδρικό κομμάτι. Άρα η δεξαμενή είναι μία σφαίρα

Άρα $\frac{4}{3}\pi x^3 = 8000 \Rightarrow x = 10\left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3}$