

Διανυσματικός Λογισμός

Τμήμα Αξιοποίησης ΦΠΓΜ

1. Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$f(x, y) = (xy - 1)^2 \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad f(x, y) = \frac{x+y}{xy-1} \quad f(x, y) = \sin^2(x - 3y).$$

2. Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$f(x, y, z) = e^{-xyz} \quad f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z) \quad f(x, y, z) = x \sin y \cos z$$

3. Για τις παρακάτω συναρτήσεις επαληθεύστε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$:

$$f(x, y) = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 \quad f(x, y) = \ln(2x + 3y)$$

4. Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης για τις συναρτήσεις :

$$f(x, y) = x^2y + \cos y + y \sin x \quad f(x, y) = \sin(xy)$$

5. Αν η εξίσωση $xy + z^3x - 2yz = 0$ ορίζει το z ως συνάρτηση δύο ελεύθερων μεταβλητών x και y και η μερική παράγωγος $\frac{\partial z}{\partial x}$ υπάρχει, να βρεθεί η τιμή της στο σημείο $(1, 1, 1)$.

[Απ: -2]

6. Επαληθεύστε ότι οι συναρτήσεις $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$ και $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \cos 2x$ ικανοποιούν την διδιάστατη εξίσωση Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

7. Επαληθεύστε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z \quad \text{και} \quad f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ικανοποιούν την τρισδιάστατη εξίσωση Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.