<u>Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α</u>

<u>Κεφάλαιο #2</u>

ΟΡΙΣΜΟΣ $m \times n$ ΠΙΝΑΚΑ

Ένας $m \times n$ πίνακας A είναι μια παράθεση πραγματικών αριθμών σε γραμμές και στήλες ως ακολούθως:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Λέμε ότι ο πίνακας A έχει m γραμμές και n στήλες και το στοιχείο του πίνακα A που βρίσκεται στην $ij-$θέση, δηλαδή, στην $i-$γραμμή και $j-$ στήλη, το συμβολίζουμε με a_{ij}. Ως εκ τούτου, συχνά γράφουμε τον πίνακα A ως

$$A \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} (a_{ij})$$

όπου $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(m, n)$ το σύνολο των πινάκων με m γραμμές και n στήλες.

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ένας 2×3 πίνακας και ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ένας 3×2 πίνακας.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΙΝΑΚΩΝ

(α) Πρόσθεση

Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ δύο $m \times n$ πίνακες,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε το άθροισμά τους $A + B := C$ να είναι ο πίνακας $C = (c_{ij})$ όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ για όλα τα ij, δηλαδή

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

(β) Πολλαπλασιασμός

Έστω $A \in \mathcal{M}(m,n)$ και $B \in \mathcal{M}(l,k)$. Το γινόμενο AB ορίζεται αν και μόνο αν $n = l$, δηλαδή, αν ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα A ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα B. Ο πίνακας γινόμενο AB έχει m γραμμές και k στήλες, δηλαδή, $AB \in \mathcal{M}(m,k)$.

Παραδείγματα:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{pmatrix}.$

Σημειωτέον ότι ο πρώτος πίνακας είναι $\mathbf{1}\times 2$ πίνακας, ο δεύτερος είναι $2\times\mathbf{3}$ και το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι ένας $\mathbf{1}\times\mathbf{3}$ πίνακας.

Το γινόμενο $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ δεν ορίζεται διότι ο πρώτος πίνακας έχει 3 στήλες και ο δεύτερος 1 γραμμή.

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-4) & 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot(-4) & 0\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Τετραγωνικοι πινακες

Ένας πίνακας A λέγεται *τετραγωνικός* αν ο αριθμός των γραμμών του ισούται με τον αριθμό των στηλών του.

Το αποτέλεσμα του γινομένου στο παράδειγμα (ii) παραπάνω είναι ένας τετραγωνικός 2×2 πίνακας.

Οι τετραγωνικοί $n\times n$ πίνακες συμβολίζονται με $\mathcal{M}(n)$. Ο τετραγωνικός $n\times n$ πίνακας που έχει την μονάδα 1 σε κάθε θέση της κυρίας διαγωνίου και 0 σε κάθε άλλη θέση ονομάζεται *ταυτοτικός* και συμβολίζεται με I_n. Για παράδειγμα, ο παρακάτω πίνακας είναι ο ταυτοτικός 5×5 πίνακας.

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Γενικά, $I_n = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ όπου $a_{ii} = 1$ και $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$.

Παρατήρηση: Αν $A \in \mathcal{M}(n)$, τότε ισχύει $AI_n = I_nA = A$, γεγονός που δικαιολογεί την ορολογία «ταυτοτικός» για τον I_n.

Ορισμός. Ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathcal{M}(n)$, είναι ένας τετραγωνικός πίνακας ίδιας διάστασης, συμβολισμός $A^{-1} \in \mathcal{M}(n)$, έτσι ώστε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Εάν ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε ο A λέγεται **αντιστρέψιμος.** Σημειωτέον ότι δεν έχουν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντίστροφο αλλά όταν ο αντίστροφος υπάρχει είναι ένας και μοναδικός. Στην συνέχεια θα διατυπώσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη του αντιστρόφου ενός πίνακα.

Ιδιότητες τετραγωνικών πινάκων. Έστω $A, B, C \in \mathcal{M}(n)$. Για $A = (a_{ij})$ συμβολίζουμε με λA τον πίνακα που στην $ij-$θέση έχει το στοιχείο λa_{ij}.

(1) $A + B = B + A$ (2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$ (4) $A\cdot(\lambda B) = \lambda(A\cdot B) = (\lambda A)\cdot B$.

Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, δηλαδή, εν γένει $AB \neq BA$. Για παράδειγμα, για τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

έχουμε

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 4\cdot(-1) & 1\cdot(-8) + 4\cdot 2 \\ 2\cdot 4 + 8\cdot(-1) & 2\cdot(-8) + 8\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + (-8)\cdot 2 & 4\cdot 4 + (-8)\cdot 8 \\ (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2 & (-1)\cdot 4 + 2\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -48 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{4. Τάξη Πίνακα}}$

Έστω $A \in \mathcal{M}(m,n)$ ένας $m \times n$ πίνακας. Θεωρούμε κάθε γραμμή του A ως διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Η **τάξη** του πίνακα A είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A.

Προφανώς, αν A είναι ένας μη μηδενικός πίνακας διάστασης $m \times n$ τότε η τάξη του είναι ένας φυσικός αριθμός ≥ 1 και $\leq m$.

Παραδείγματα:

Η τάξη του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι 2 αφού τα διανύσματα $u_1 = (1,2,1)$ και $u_2 = (0,3,1)$ που καθορίζονται από τις γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^3$.

Η τάξη του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι 2 αφού τα διανύσματα $u_1 = (1,2,1)$ και $u_2 = (2,4,2)$ που καθορίζονται από τις γραμμές του είναι γραμμικά εξαρτημένα στον $\mathbb{R}^3$ ($u_2 = 2u_1$). Άρα η τάξη του είναι 1.

Η τάξη του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ δεν μπορεί να ισούται με 3 αφού ξέρουμε, από το Θεώρημα του προηγούμενου κεφαλαίου, ότι δεν υπάρχουν 3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$. Εξετάζουμε αν δύο από τα διανύσματα $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (3,3)$ και $u_3 = (0,2)$ που καθορίζονται από τις γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τα u_1, u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα, όμως, τα $u_1 = (1,1)$, $u_3 = (0,2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2.

Η διαδικασία ελέγχου που κάναμε στα παραπάνω παραδείγματα είναι πρακτικά ανέφικτη όταν η διάσταση του εξεταζόμενου πίνακα είναι μεγάλη. Γι΄ αυτό θα περιγράψουμε στην συνέχεια έναν αλγόριθμο εύρεσης της τάξης ενός πίνακα που μπορεί να εφαρμοστεί και σε πίνακες μεγάλης διάστασης.

(α) Κλιμακωτοί Πίνακες

Ένας πίνακας A λέγεται **κλιμακωτός** αν ισχύουν τα εξής:

(i) Το στοιχείο a_{11} του A στην 1η γραμμή και πρώτη στήλη είναι διάφορο του μηδενός ($a_{11} \neq 0$).

(ii) Το $1^{\text{ο}}$ μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το

1° μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής. Συμβολικά,

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{i_0 j_0} & \neq & 0 \quad \text{και} \\ a_{i_0 j} & = & 0, \quad \forall j < j_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_{(i_0-1)\,j'} \neq 0 \text{ για κάποιο } j' < j_0.$$

(iii) Οι μηδενικές γραμμές βρίσκονται στο τέλος του πίνακα.

Παραδείγματα:

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός.

Το στοιχείο 8 στην 32−θέση του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν ικανοποιεί την συνθήκη (ii) παραπάνω, άρα ο πίνακας δεν είναι κλιμακωτός.

Παρομοίως οι πίνακες $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ δεν είναι κλιμακωτοί.

Πρόταση: Η τάξη ενός κλιμακωτού πίνακα ισούται με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών του.

Για παράδειγμα, η τάξη του πίνακα $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ είναι 3 και η τάξη του πίνακα $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ είναι 2.

(β) Μετατροπή πίνακα σε κλιμακωτό

Υπάρχει μία καλά ορισμένη επαναληπτική διαδικασία (μέθοδος απαλοιφής Gauss) η οποία μετατρέπει κάθε πίνακα A σε κλιμακωτό. Η μέθοδος αυτή έχει μεγάλη πρακτική αξία για την εύρεση της τάξης τυχαίου πίνακα λόγω της παραπάνω Πρότασης και του γεγονότος ότι

· πολλαπλασιάζοντας μια γραμμή με ένα μη-μηδενικό αριθμό,

· προσθέτοντας μια γραμμή σε μια άλλη γραμμή και

· εναλλάσσοντας την θέση δύο γραμμών (ή στηλών),

η τάξη του πίνακα που προκύπτει δεν αλλάζει.

Εφαρμόζοντας πράξεις μεταξύ γραμμών των τριών παραπάνω τύπων, ο τυχαίος πίνακας μετατρέπεται σε κλιμακωτό και, από την παραπάνω Πρόταση, η τάξη του προκύπτει άμεσα.

<u>Παράδειγμα:</u> Ο συμβολισμός $\xrightarrow{\lambda r_i+r_j}$ σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε την $i-$γραμμή με λ και την προσθέτουμε στην $j-$γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{-\frac{2}{3}r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Η πρώτη πράξη μηδενίζει τον αριθμό 2 στην 21−θέση και η δεύτερη τον αριθμό 3 στην 31−θέση. Η τρίτη πράξη μηδενίζει το −2 στην 32−θέση.

<u>Παράδειγμα:</u> $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_3}$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Ορίζουσες τετραγωνικών πινάκων 2×2 και 3×3.

Η ορίζουσα $det(A)$ του τετραγωνικού 2×2 πίνακα $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ισούται εξ ορισμού με $det(A) := ad - bc$. Ένας άλλος συνηθισμένος συμβολισμός για την ορίζουσα του πίνακα A είναι ο εξής:

$$det(A) = det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Η ορίζουσα $det(A)$ του τετραγωνικού 3×3 πίνακα $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right)$ ισούται με

$$det(A) := a_{11}\ det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\ det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\ det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα υπολογίζεται και από την παρακάτω παράσταση:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε την ορίζουσα ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα για κάθε φυσικό n.

Γεωμετρική Σημασία ορίζουσας. Έστω τα διανύσματα $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$ στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Το εμβαδόν E του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα u, v ισούται με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Δηλαδή $E = |det(A)|$.

Έστω τα διανύσματα $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3)$ και $w = (z_1, z_2, z_3)$ στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^3$. Ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα u, v, w ισούται με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του 3×3 πίνακα $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$. Δηλαδή $V = |det(A)|$.

Πρόταση: Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας. Αν $det(A) \neq 0$ τότε υπάρχει ο αντίστροφος A^{-1} του A και ισούται με

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{det(A)} & \frac{-b}{det(A)} \\ \frac{-c}{det(A)} & \frac{a}{det(A)} \end{pmatrix}.$$

Πρόταση: Έστω $A, B \in \mathcal{M}(n)$ τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες. Τότε ισχύει

$$det(AB) = det(A)\, det(B).$$

Ιδιότητες Οριζουσών: 1) Αν σε μια γραμμή (αντ. στήλη) προσθέσουμε μια άλλη γραμμή, διατηρώντας όλες τις άλλες γραμμές (αντ. στήλες) αμετάβλητες, η ορίζουσα παραμένει η ίδια.
2) Ένας πίνακας με δύο ίδιες γραμμές (αντ. στήλες) έχει ορίζουσα ίση με μηδέν.
3) Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή (αντ. στήλη) με ένα πραγματικό αριθμό λ τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ.

Θεώρημα: Έστω $A \in \mathcal{M}(n)$ τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή, υπάρχει ο A^{-1}.
- $det(A) \neq 0$.
- Η τάξη του πίνακα A ισούται με n.

Ασκήσεις

1. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Να εξετάσετε ποια από τα γινόμενα $AA, AB, BA, BB, BC, CB, CC, AC, CA$ υπάρχουν και, όποια υπάρχουν, να τα υπολογίσετε.

2. Να βρείτε την τάξη καθενός από τους παρακάτω πίνακες:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   [Απ: $3, 3, 3$]

3. Είναι δυνατόν ένας 4×3 πίνακας να έχει τάξη 4?
   Υπόδειξη: ποιος ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^3$?

4. Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, υπάρχει πίνακας X (κατάλληλης διάστασης) έτσι ώστε $XA = B$?

   [Υπόδειξη: $\det A = 1 \neq 0$ άρα υπάρχει ο A^{-1}.]

5. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, υπάρχει πίνακας X (κατάλληλης διάστασης) έτσι ώστε $AX = B$?

   Υπόδειξη: $\det A = 0, \det B \neq 0$ άρα, αν υπήρχε τέτοιος πίνακας X

   $$0 = \det(A)\det(X) = \det(AX) = \det(B) \neq 0.$$

   Εναλλακτικά, διαπιστώστε ότι το σύστημα που προκύπτει από την εξίσωση πινάκων

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   δεν έχει λύση.

6. Όμοια με την Άσκηση 5 με τον πίνακα B να είναι $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη: Η αντίστοιχη εξίσωση $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$ δίνει το σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} x + 2z = 4 \\ y + 2w = 1 \end{array} \right\}$ που έχει άπειρες λύσεις, φερ´ ειπείν, $x = 4, y = 1, z = w = 0 \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.