

Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

Κεφάλαιο #1

Έστω \mathbb{R} το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Συμβολίζουμε με

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

τις διατεταγμένες n -άδες πραγματικών αριθμών.

Δύο διατεταγμένες n -άδες (x_1, x_2, \dots, x_n) και $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ είναι ίσες αν $x_i = x'_i$ για όλα τα $i = 1, 2, \dots, n$.

Εφοδιάζουμε το \mathbb{R}^n με δύο πράξεις, το **άθροισμα** και το **βαθμωτό γινόμενο** ως εξής:

Αν $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ στοιχεία του \mathbb{R}^n και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$u + v := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ και } \lambda u := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Το \mathbb{R}^n εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις καλείται **Ευκλείδιος χώρος διάστασης n** και τα στοιχεία του λέγονται **διανύσματα** (ή **ανύσματα**). Συμβολίζουμε το μηδενικό διάνυσμα $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ με $\bar{0}$ ή απλά με 0 αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 Έστω v_1, v_2, \dots, v_k διανύσματα του \mathbb{R}^n , όπου k θετικός ακέραιος. Ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι (ή εκφράζεται ως) **γραμμικός συνδυασμός** των v_1, v_2, \dots, v_k αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ έτσι ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$.

Παράδειγμα: Το διάνυσμα $v = (1, 3, 0)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1 = (0, 1, -1)$ και $v_2 = (1, 1, 2)$.

Εξήγηση: Αναζητούμε αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ δηλαδή,

$$(1, 3, 0) = \lambda_1(0, 1, -1) + \lambda_2(1, 1, 2) \Leftrightarrow (1, 3, 0) = (\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2).$$

Η τελευταία ισότητα διανυσμάτων ισχύει αν και μόνο αν
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \lambda_2 \\ 3 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array} \right\}$$

Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 1$, δηλαδή, $v = 2v_1 + v_2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 Τα διανύσματα v_1, v_2, \dots, v_k του Ευκλείδιου χώρου \mathbb{R}^n , λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** αν για κάθε γραμμικό συνδυασμό $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \bar{0}$ συνεπάγεται αναγκαστικά ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Τα διανύσματα v_1, v_2, \dots, v_k θα λέγονται **γραμμικά εξαρτημένα** αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή, υπάρχει γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \bar{0}$ χωρίς να μηδενίζονται όλοι οι συντελεστές λ_i .

Ισοδύναμα, τα διανύσματα v_1, v_2, \dots, v_k είναι **γραμμικά εξαρτημένα** αν κάποιος v_i από αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, δηλαδή,

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \dots + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_k v_k.$$

Παραδείγματα

1) Τα διανύσματα $(1, 2)$ και $(0, 1)$ του \mathbb{R}^2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2) Τα διανύσματα $(1, 2, -1)$, $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, 1)$ του \mathbb{R}^3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

$$\lambda_1(1, 2, -1) + \lambda_2(1, 0, 1) + \lambda_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ -\lambda_1 - \lambda_1 - 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow -4\lambda_1 = 0 \text{ και άρα } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

3) Τα διανύσματα $(1, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$ και $(2, 1, 1)$ του \mathbb{R}^3 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

$$\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, -1) + \lambda_3(2, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα έχει άπειρες λύσεις, φερ' ειπείν, για $\lambda_3 = -1$ έχουμε $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 1$ οπότε το διάνυσμα $(2, 1, 1)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, -1)$ ως εξής:

$$(2, 1, 1) = 2(1, 0, 1) + 1(0, 1, -1).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

(α) Ο Ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^n έχει το πολύ n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

(β) Αν v_1, v_2, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον \mathbb{R}^n τότε κάθε άλλο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2, \dots, v_n .

Σημείωση: Λόγω του (β) στο Θεώρημα παραπάνω, κάθε n -άδα v_1, v_2, \dots, v_n αποτελούμενη από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον \mathbb{R}^n λέμε ότι αποτελεί **βάση** του \mathbb{R}^n . Προφανώς ο χώρος \mathbb{R}^n έχει άπειρες βάσεις.

Παράδειγμα: Τα διανύσματα $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ του \mathbb{R}^3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 : αν $u = (u_1, u_2, u_3)$ τυχαίο διάνυσμα τότε

$$\begin{aligned}u &= (u_1, u_2, u_3) = (u_1, 0, 0) + (0, u_2, 0) + (0, 0, u_3) \\ &= u_1(1, 0, 0) + u_2(0, 1, 0) + u_3(0, 0, 1)\end{aligned}$$

Κανονική Βάση του \mathbb{R}^n : Τα διανύσματα

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα και (άρα) αποτελούν βάση του \mathbb{R}^n που λέγεται **κανονική βάση**.

Ασκήσεις

1. Είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα

(α) $(1, 3), (1, -3) \in \mathbb{R}^2$ [Απ: Ναι.]

(β) $(-1, 3), (1, -3) \in \mathbb{R}^2$ [Απ: Όχι.]

(γ) $(-1, 3), (1, -3), (-4, 1), (2, 2) \in \mathbb{R}^2$ [Απ: Όχι.]

(δ) $(1, 3, 0), (1, 3, -1), (0, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ [Απ: Ναι.]

(ε) $(1, 3, 0), (1, 3, -1), (1, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ [Απ: Όχι.]

2. Να δείξετε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα $v, u \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν τα v, u είναι συγγραμικά, δηλαδή $v = \lambda u$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ισχύει το ίδιο στο $\mathbb{R}^n, n > 2$? [Απ: Ναι.]

3. Εξετάστε αν τα διανύσματα $u = (1, -1, 2), v = (1, 0, -3), w = (0, 2, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή εξαρτημένα. Αν είναι ανεξάρτητα, εκφράστε το διάνυσμα $(2, 1, -1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των v, u, w .

$$[\text{Απ: } \frac{9}{11}u + \frac{13}{11}v + \frac{10}{11}w = (2, 1, -1)]$$

4. Βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη μεταξύ των συντεταγμένων x, y, z του διανύσματος $\vec{b} = (x, y, z)$ ώστε αυτό να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v = (1, 0, -1)$ και $u = (0, 1, 2)$.

$$[\text{Απ: } x - 2y + z = 0]$$

5. Βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη μεταξύ των συντεταγμένων x, y, z του διανύσματος $\vec{c} = (x, y, z)$ ώστε αυτό να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v = (1, -1, 2)$ και $u = (3, -1, 1)$.

[Απ: $x + 5y + 2z = 0$]

6. Είναι το σύνολο διανυσμάτων $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2), (2, 0, 1)\}$ βάση του \mathbb{R}^3 ?

[Απ: Ναι.]

7. Συμπληρώστε τα διανύσματα $v = (1, 0, -1)$ και $u = (0, 1, 2)$ σε μία βάση του \mathbb{R}^3 .

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4: φερ' ειπείν, το διάνυσμα $(1, 1, 0)$ δεν ικανοποιεί την σχέση $x - 2y + z = 0$.

8. Έστω v_1, v_2, \dots, v_n μια βάση του \mathbb{R}^n . Αποδείξτε ότι κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων v_1, v_2, \dots, v_n , δηλαδή, υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι αν $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \lambda'_1 v_1 + \dots + \lambda'_n v_n$, τότε αναγκαστικά $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$