# Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

# Κεφάλαιο #8

## Συναρτησεις Πολλων Μεταβλητων

### Ορισμος Μερικης Παραγωγου και Υπολογισμοι

Έστω $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ συνάρτηση. Η **μερική παράγωγος της $\mathbf{f(x,y)}$ ως προς $\mathbf{x}$** στο σημείο $(x_0, y_0)$ ορίζεται ως το όριο

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{(x,y_0)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

εφ΄ όσον το όριο αυτό υπάρχει. Χρησιμοποιείται συχνά και ο συμβολισμός $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$.

Σημείωση: όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, έτσι και εδώ για να θεωρήσουμε το παραπάνω όριο θα πρέπει το πεδίο ορισμού $D$ να περιέχει σημεία κοντά στο $(x_0, y_0)$. Αυτό εξασφαλίζεται αν υποθέσουμε ότι για κάθε $(x_0, y_0) \in D$ υπάρχει ένας δίσκος με κέντρο το $(x_0, y_0)$ που να περιέχεται ολόκληρος στο $D$.

Αν το όριο υπάρχει για κάθε $(x_0, y_0) \in D$ τότε λέμε ότι υπάρχει η συνάρτηση μερική παράγωγος της $f$ ως προς $x$ και την συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial x}$ ή $f_x$. Πανομοιότυπα, έχουμε την μερική παράγωγο της $f$ ως προς $y$:

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{(x_0,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}.$$

Οι συναρτήσεις $f_x, f_y$, όταν αυτές υπάρχουν, είναι συναρτήσεις 2 μεταβλητών οπότε μπορούμε να εξετάσουμε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των $f_x, f_y$, ως προς $x$ και $y$:

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} \qquad \frac{\partial f_x}{\partial y} \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{xy}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{yx} \qquad \frac{\partial f_y}{\partial y} \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy}$$

Ισχύουν όλοι οι κανόνες παραγώγισης που γνωρίζουμε για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις μιας μεταβητής:

$$\frac{\partial (cf)}{\partial x} = c\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial (f \pm g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$$

Παραγώγιση σύνθεσης συναρτήσεων: $\dfrac{\partial\,(f\circ g)}{\partial x} = \dfrac{d}{d\,(g(x))}\,(f(g(x)))\cdot\dfrac{\partial g(x)}{\partial x}$.

**Παραδείγματα:** Για τον υπολογισμό της μερικής παραγώγου ως προς $x$ χρησιμοποιούμε τους παραπάνω κανόνες παραγώγισης θεωρώντας την μεταβλητή $y$ ως σταθερά.

**1.** $f(x,y) = x^2 - 3xy + y + 1$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 3xy + y + 1\right) = 2x - 3y + 0.$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 3xy + y + 1\right) = -3x + 1.$$

Επίσης,

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x - 3y) = 2$$

και

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 3y) = -3.$$

**2.** $f(x,y) = e^{x-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x-y^2}\right) = e^{x-y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x - y^2\right) = e^{x-y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y^2}\right) = e^{x-y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x - y^2\right) = -2ye^{x-y^2}.$$

Επίσης, $f_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{x-y^2}\right) = e^{x-y^2}, f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y^2}\right) = -2ye^{x-y^2} = f_{yx}$ και

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2ye^{x-y^2}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial y}(-2y)\right]e^{x-y^2} + (-2y)\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y^2}\right) = -2e^{x-y^2} + 4y^2e^{x-y^2}.$$

Πανομοιότυπα εργαζόμαστε για τον ορισμό και τους υπολογισμούς των μερικών παραγώγων όταν η συνάρτηση $f$ είναι συνάρτηση 3 μεταβλητών ($D \subset \mathbb{R}^3$):

**3.** $f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$.

$$\begin{array}{lll} f_y = -4xyz + x^2 & f_z = -2xy^2 & f_{zz} = 0 \\ f_{yx} = -4yz + 2x & f_{yy} = -4xz & f_{yyy} = 0 \\ f_{yxy} = -4z & & \end{array}$$

**4.** $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x^2 + y^2 + z^2)\right) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

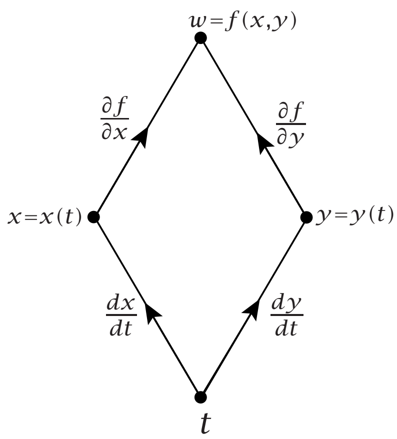
Υπενθυμίζουμε τον κλασσικό κανόνα αλυσίδας: αν $f$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς $x$ και $x = x(t)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς $t$, τότε η σύνθεση $w(t) = f(x(t))$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς $t$ και ισχύει

$$\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Έστω τώρα ότι $w = f(x, y)$ είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών και κάθε μια μεταβλητή, $x = x(t)$ και $y = y(t)$, είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς $t$. Αν η $f$ έχει μερικές παραγώγους ως προς $x$ και $y$ τότε

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{1}$$

Παρατηρήστε στον παραπάνω τύπο ότι για τις συναρτήσεις $w(t), x(t)$ και $y(t)$ γίνεται χρήση του συμβόλου $\dfrac{d}{dt}$ διότι αυτές είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής $t$, ενώ για την $f(x, y)$ που είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, $x$ και $y$, γίνεται χρήση του συμβόλου $\dfrac{\partial}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial}{\partial y}$.




Το διπλανό γράφημα δείχνει την μεταβλητή $w$ να εξαρτάται μέσω της συνάρτησης $f$ από τις μεταβλητές $x$ και $y$ οι οποίες στην συνέχεια εξαρτώνται από την μεταβλητή $t$. Θεωρώντας τους κλάδους που συνδέουν το $t$ με το $w$ μπορούμε εύκολα να γράψουμε τον τύπο (1).

**Παράδειγμα 4:** Έστω η συνάρτηση $w = f(x, y) = xy$. Ποιά είναι η παράγωγος ως προς $t$ κατά μήκος της καμπύλης $(\cos t, \sin t)$ και ποιά η τιμή της στο $t = \pi/2$?

Έχουμε $x(t) = \cos t$ και $y(t) = \sin t$ οπότε

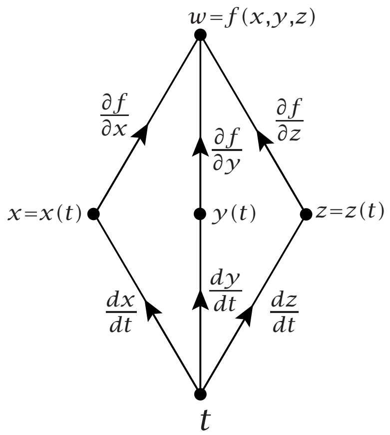
$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy)\frac{d(\cos t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}(xy)\frac{d(\sin t)}{dt} \\ &= y(-\sin t) + x\cos t = -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos(2t)\end{aligned}$$

και $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = [\cos(2t)]_{t=\frac{\pi}{2}} = \cos\pi = -1.$

Προφανώς, ο παραπάνω υπολογισμός μπορεί, λόγω του απλούστατου τύπου της $f$, να γίνει εύκολα και χωρίς την χρήση του κανόνα της αλυσίδας:

$$w(t) = (\cos t)(\sin t) = \frac{1}{2}\sin(2t) \text{ και } \frac{dw}{dt} = \frac{1}{2}(\sin(2t))' = \cos(2t).$$

Πανομοιότυπος είναι ο κανόνας της αλυσίδας για συναρτήσεις $w = f(x, y, z)$ τριών μεταβλητών




$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

**Παράδειγμα 5:** Έστω η συνάρτηση $w = f(x, y, z) = x^4y + xz^3$. Να βρεθεί η παράγωγος ως προς $t$ κατά μήκος του έλικα $(\cos t, \sin t, t)$ και η τιμή της στο $t = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d(\cos t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d(\sin t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d(t)}{dt} &= (4x^3y + z^3)(-\sin t) + x^4(\cos t) + 3xz^2\cdot 1\\ &= \left(4\cos^3 t\sin t + t^3\right)(-\sin t) + (\cos t)^4(\cos t) + 3(\cos t)t^2\\ &= -4\cos^3 t\sin^2 t - t^3\sin t + \cos^5 t + 3t^2\cos t\end{aligned}$$

και

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = -4\cos^3 0\sin^2 0 - 0 + \cos^5 0 + 0 = 1.$$

**Εφαρμογή:** Έστω $\alpha, \beta$ τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου τα οποία μεταβάλλονται με το χρόνο. Μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t_0$ που μας ενδιαφέρει έχουμε $\alpha(t_0) = 1m$, $\beta(t_0) = 3m$ και $\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0} = 2m/sec$ και $\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0} = -1m/sec$. Με ποιό ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν $E$, η περίμετρος $S$ και το μήκος $L$ των διαγωνίων του παραλληλογράμμου την χρονική στιγμή $t_0$;

Τα ζητούμενα μεγέθη δίνονται από τους εξής τύπους

$$E = E(\alpha, \beta) = \alpha\beta, \quad S = S(\alpha, \beta) = 2(\alpha + \beta) \quad \text{και} \quad L = L(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους $\left.\frac{dE}{dt}\right|_{t_0}$, $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t_0}$ και $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{t_0}$ ως εξής:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{t_0} = \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial\alpha}\left(\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right) + \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial\beta}\left(\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0}\right) = \beta(t_0)(2) + \alpha(t_0)(-1) = 6 - 1 = 5$$

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t_0} = \frac{\partial(2(\alpha+\beta))}{\partial\alpha}\left(\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right) + \frac{\partial(2(\alpha+\beta))}{\partial\beta}\left(\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0}\right) = 2\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 2$$

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{t_0} = \frac{\partial\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\partial\alpha}\left(\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right) + \frac{\partial\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\partial\beta}\left(\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0}\right) = \left[\frac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]_{t=t_0}\cdot(2) +$$
$$+\left[\frac{2\beta}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]_{t=t_0}\cdot(-1) = 2\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{1^2+3^2}} - \frac{2\cdot 3}{2\sqrt{1^2+3^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

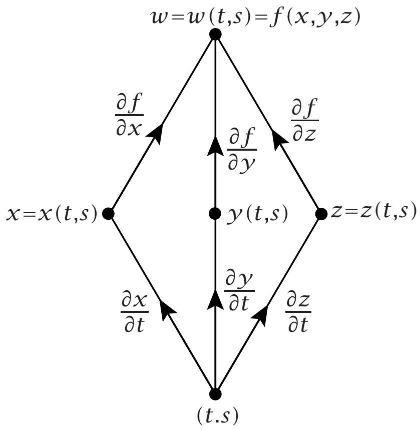
Άρα την χρονική στιγμή $t_0$ το εμβαδόν και η περίμετρος μεγαλώνουν ενώ το μήκος της διαγωνίου μικραίνει.

ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΕ 2 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ

Έστω ότι $w = f(x,y)$ είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών και οι μεταβλητές $x = x(t,s), y = y(t,s)$ είναι συναρτήσεις δύο παραμέτρων $t$ και $s$ έτσι ώστε όλες οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}$$

να υπάρχουν. Αν η $f$ έχει μερικές παραγώγους ως προς $x$ και $y$ τότε




$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

και πανομοιότυπα, για την περίπρωση 3 μεταβλητών $w = f(x,y,z)$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{και} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

**Παράδειγμα 6:** Για την συνάρτηση $w = f(x,y) = x^2+y^2$ με $x(t,s) = t-s$ και $y(t,s) = t+s$, να βρεθεί η μερική παράγωγος $\frac{\partial w}{\partial s}$ στο σημείο $(t,s) = (1,1)$.

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2x\frac{\partial(t-s)}{\partial s} + 2y\frac{\partial(t+s)}{\partial s} = 2(t-s)(-1) + 2(t+s)1 = [4s]_{(1,1)} = 4.$$

**Παράδειγμα 7:** Για την συνάρτηση $w = f(x,y,z) = x+2y+z^2$ με $x(t,s) = t/s$, $y(t,s) = t^2+\log s$ και $z(t) = 2t$, να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial w}{\partial t}$ και $\frac{\partial w}{\partial s}$.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 1\frac{\partial(t/s)}{\partial t} + 2\frac{\partial(t^2+\log s)}{\partial t} + 2z\frac{\partial(2t)}{\partial t} =$$
$$= \frac{1}{s} + 2(2t) + 2(2t)2 = \frac{1}{s} + 12t.$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = 1\frac{\partial(t/s)}{\partial s} + 2\frac{\partial(t^2+\log s)}{\partial s} + 2z\frac{\partial(2t)}{\partial s}$$
$$= \frac{-t}{s^2} + 2\frac{1}{s} + 2t0 = \frac{2s-t}{s^2}.$$

## Τοπικα Μεγιστα, Ελαχιστα, Σαγματικα σημεια

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών που έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης. Επίσης, για λόγους απλότητας και μόνο, θεωρούμε το πεδίο ορισμού να είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$.

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ λέμε ότι έχει **τοπικό μέγιστο στο** $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ αν για κάθε $(x,y)$ αρκετά κοντά στο $(a,b)$ ισχύει $f(a,b) \geq f(x,y)$.

Η έννοια «αρκετά κοντά» μπορεί να περιγραφεί αυστηρά ως εξής: υπάρχει θετικός αριθμός $\varepsilon$ έτσι ώστε για κάθε $(x,y)$ που η Ευκλείδια απόσταση

$$|(x,y)-(a,b)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

είναι $< \varepsilon$ ισχύει $f(a,b) \geq f(x,y)$.

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ λέμε ότι έχει **τοπικό ελάχιστο στο** $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ αν για κάθε $(x,y)$ αρκετά κοντά στο $(a,b)$ ισχύει $f(a,b) \leq f(x,y)$.

Προταση Αν $f(x,y)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο $(a,b)$ τότε $f_x(a,b) = 0$ και $f_y(a,b) = 0$.

Ορισμος Τα σημεία στα οποία αμφότερες οι μερικές παράγωγοι της $f$ μηδενίζονται ονομάζονται **κρίσιμα σημεία** της $f$.
Ένα κρίσιμο σημείο της $f$ λέγεται **σημείο καμπής (ή σαγματικό σημείο)** αν οσοδήποτε κοντά στο $(a,b)$ υπάρχουν σημεία $(x_1,y_1)$ και $(x_2,y_2)$ ώστε να ισχύει $f(x_1,y_1) > f(a,b) > f(x_2,y_2)$.

Η έννοια «οσοδήποτε κοντά» μπορεί να περιγραφεί αυστηρά ως εξής: για κάθε θετικό αριθμό $\varepsilon$ υπάρχουν σημεία $(x_1,y_1)$ και $(x_2,y_2)$ έτσι ώστε $|(x_1,y_1)-(a,b)| < \varepsilon$, $|(x_2,y_2)-(a,b)| < \varepsilon$ και $f(x_1,y_1) > f(a,b) > f(x_2,y_2)$.

Η ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{yx}(p) \\ f_{xy}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix}$ ονομάζεται **Εσσιανή ορίζουσα** της $f$ στο $p$, συμβολίζεται με $H_f(p)$ και ισούται με

$$H_f(p) = f_{xx}(p)f_{yy}(p) - \left(f_{xy}(p)\right)^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω ότι η $f(x,y)$ έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης και $p$ κρίσιμο σημείο της $f$.

Αν $H_f(p) > 0$ και $f_{xx}(p) < 0$ τότε η $f$ έχει τοπικό μέγιστο στο $p$.
Αν $H_f(p) > 0$ και $f_{xx}(p) > 0$ τότε η $f$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $p$.
Αν $H_f(p) < 0$ τότε το $p$ είναι σαγματικό σημείο της $f$.

Παρατήρηση: Αν $H_f(p) = 0$ δεν υπάρχει κάποιο συμπέρασμα.

**Παράδειγμα 11:** Για την συνάρτηση $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατα ως εξής:

Οι μερικές παράγωγοι είναι $\begin{array}{l} f_x = y - 2x - 2 \\ f_y = x - 2y - 2 \end{array}$ και $\begin{array}{l} f_{xx} = -2 \\ f_{yy} = -2 \\ f_{xy} = 1 = f_{yx} \end{array}$

> Σημείωση: Όταν η $f$ έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης τότε ισχύει πάντα η ισότητα $f_{xy} = f_{yx}$, συνεπώς, δεν χρειάζεται να υπολογίζουμε και την $f_{xy}$ και την $f_{yx}$ αλλά μόνο την μία από τις δύο.

Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(a,b)$ για τα οποία ισχύει

$$\begin{aligned} f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b) &\iff [y - 2x - 2]_{(a,b)} = 0 = [x - 2y - 2]_{(a,b)} \\ &\iff b - 2a - 2 = 0 \text{ και } a - 2b - 2 = 0 \\ &\iff a = -2 \text{ και } b = -2. \end{aligned}$$

Για να εξετάσουμε αν στο μοναδικό κρίσιμο σημείο $(-2,-2)$ έχουμε τοπικό ακρότατο ή σημείο καμπής βρίσκουμε την Εσσιανή ορίζουσα:

$$H_f(-2,-2) = f_{xx}(-2,-2)f_{yy}(-2,-2) - \left(f_{xy}(-2,-2)\right)^2 = (-2)(-2) - 1^2 = 3 > 0$$

και αφού $f_{xx}(-2,-2) = -2 < 0$ η $f$ έχει τοπικό μέγιστο στο $(-2,2)$.

**Παράδειγμα 12:** Για την συνάρτηση $f(x,y) = -2y^3 + 3y^2 - 3x^2 + 6xy$ βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατα ως εξής:

Οι μερικές παράγωγοι είναι $\begin{array}{l} f_x = -6x + 6y \\ f_y = -6y^2 + 6y + 6x \end{array}$ και $\begin{array}{l} f_{xx} = -6 \\ f_{yy} = -12y + 6 \\ f_{xy} = 6 = f_{yx} \end{array}$

Για τα κρίσιμα σημεία έχουμε

$$\begin{aligned} -6x + 6y = 0 = -6y^2 + 6y + 6x &\iff 6x = 6y \quad \text{και} \quad y(-6y + 6 + 6) = 0 \\ &\iff (x,y) = (0,0) \quad \text{ή} \quad (x,y) = (2,2). \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την Εσσιανή

$$H_f = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = (-6)(-12y+6) - 6^2 = 72(y-1)$$

και έχουμε

$H_f(0,0) = -72(0-1) = -72 < 0$ άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο

και

$H_f(2,2) = 72(2-1) = 72 > 0$ με $f_{xx}(2,2) = -6 < 0$ άρα στο $(2,2)$ η $f$ έχει τοπικό μέγιστο.

# Ασκήσεις

1. Αν $w = \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}$ και $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t, z = 1/t$, βρείτε την παράγωγο $\dfrac{dw}{dt}$ στο σημείο $t = 3$. [Απ: 1]

2. Έστω $w = (x + y + z)^2$.

   (α) Αν $x = r - s, y = \cos(r + s), z = \sin(r + s)$, βρείτε την μερική παράγωγο $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ στο σημείο $(r, s) = (1, -1)$. [Απ: 12]

   (β) Αν $x = ue^v \sin u, y = ue^v \cos u, z = ue^v$, βρείτε την μερική παράγωγο $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ στο σημείο $(u, v) = (-2, 0)$. [Απ: $4\pi - \pi^2$]

3. Τα μήκη $\alpha, \beta, \gamma$ των ακμών ορθογωνίου κιβωτίου μεταβάλλονται με το χρόνο. Την στιγμή που μας ενδιαφέρει

$$\alpha = 1m, \quad \beta = 2m, \quad \gamma = 3m, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = 1m/sec \quad \text{και} \quad \frac{d\gamma}{dt} = -3m/sec.$$

Με ποιό ρυθμό μεταβάλλεται ο όγκος $V$ και το συνολικό εμβαδό $S$ των εδρών του κιβωτίου; Μεγαλώνει ή μικραίνει το μήκος των εσωτερικών διαγωνίων;

$$\left[ \text{Απ:} \begin{array}{ll} V(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\beta\gamma & \dfrac{dV}{dt} = 3 \\ S(\alpha,\beta,\gamma) = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) & \dfrac{dS}{dt} = 0 \\ L(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{-6}{\sqrt{14}} \end{array} \right]$$

4. Για τις επόμενες συναρτήσεις βρείτε τα τοπικά μέγιστα, ελάχιστα και σαγματικά σημεία:

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 3y^2, \quad g(x, y) = x^3 + 3xy + y^3, \quad h(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6.$$

$$\left[ \text{Απ:} \begin{array}{l} f \text{ τοπ. ελάχιστο στο } (0,0) : H_f(0,0) = 8, f_{xx}(0,0) > 0 \\ \\ g \text{ τοπ. μέγιστο στο } (-1,-1) : H_g(-1,-1) = 27, g_{xx}(-1,-1) = -6 \\ (0,0) \text{ σημείο καμπής της } g : H_g(0,0) = -9 \\ \\ h \text{ τοπ. μέγιστο στο } \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) : H_h\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 12, h_{xx}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -4 \\ (0,0) \text{ σημείο καμπής της } h : H_h(0,0) = -4 \end{array} \right]$$