Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

Κεφάλαιο #7

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ (ΓΙΑ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

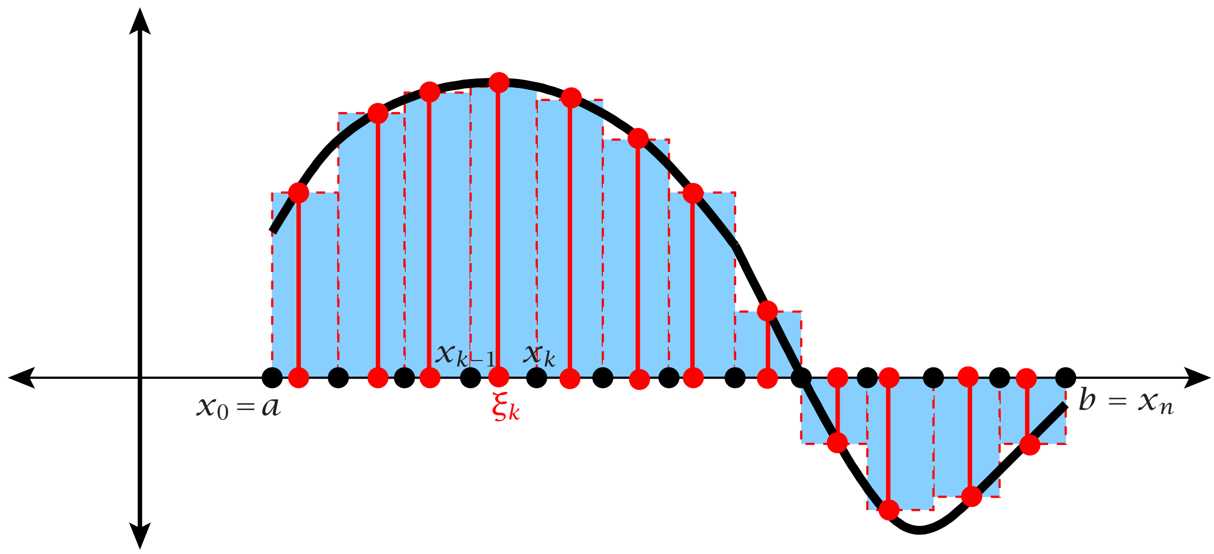
Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

(όπου $x_0 = a$ και $x_n = b$), μήκους $\frac{b-a}{n} \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \Delta x$ το κάθε ένα.
Επιλέγουμε τυχαίο σημείο $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = f(\xi_1)\,\Delta x + f(\xi_2)\,\Delta x + \cdots + f(\xi_n)\,\Delta x \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x$$

Αποδεικνύεται ότι για συνεχείς συναρτήσεις το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
Η τιμή του ορίου ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)dx$.



- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από το γράφημα της f και τον $x-$άξονα.
- Αν $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ ισούται με το αντίθετο του προαναφερθέντος εμβαδού.

- Αν $f(x) \geq 0$ για $x \in [a,c]$ και $f(x) \leq 0$ για $x \in [c,b]$ τότε το ολοκλήρωμα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα

$$\int_a^b f(x)dx = E^+ - E^-$$

όπου E^+ (αντίστοιχα E^-) είναι το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται πάνω (αντ. κάτω) από τον $x-$άξονα.

Ιδιότητες: Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $c \in [a,b]$.

1. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
2. $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. Αν η f είναι φραγμένη, δηλαδή, υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ με $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x) \leq M(b-a)$.

Λέμε ότι μια συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι **παράγουσα** της συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ αν $G'(x) = f(x)$. Η παράγουσα μιας συνάρτησης f δεν είναι μοναδική αφού αν G παράγουσα της f τότε και η συνάρτηση $G(x) + C$, όπου C σταθερά, είναι επίσης παράγουσα της f.

Πρόταση Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ παράγουσα της f τότε

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Η παραπάνω Πρόταση είναι Πόρισμα του πολύ πιο γενικού και σημαντικού Θεωρήματος που ονομάζεται Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού και το οποίο αποδεικνύει την ύπαρξη παράγουσας για κάθε συνεχή συνάρτηση.

Θεμελιώδες Θεώρημα Αειροστικού Λογισμού Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $F'(x_0) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in [a,b]$.

Η $F(x)$ είναι, προφανώς, μια παράγουσα της f και ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f**.

Από το Κεφάλαιο 6, γνωρίζουμε τις παράγουσες αρκετών συναρτήσεων:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$$
$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C, a > 0$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

Τεχνικες Ολοκληρωσης

(α) Μέθοδος αντικατάστασης

Αλλάζουμε την μορφή της συνάρτησης $f(x)$ θέτοντας μια κατάλληλη παράσταση ως προς x ως νέα μεταβλητή $t = t(x)$ και έχουμε

$$dt = t'(x)dx \quad \text{και} \quad \int f(x)dx = \int \phi(t)dt.$$

Η επιλογή της παράστασης $t(x)$ γίνεται με σκοπό το ολοκλήρωμα της $\phi(t)$ να είναι πιο εύκολα υπολογίσιμο.

Παράδειγμα (α1):

$$\int \sin(2x)dx = \begin{bmatrix} \text{Θέτουμε } t = 2x \\ \text{οπότε } dt = 2dx \end{bmatrix} = \int \frac{\sin t}{2}dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C.$$

Παράδειγμα (α2): $\displaystyle\int \frac{x^3}{(3x^4-5)^6}dx = \begin{bmatrix} \text{Θέτουμε } t = 3x^4 - 5 \\ \text{οπότε } dt = 12x^3dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t^6}\frac{1}{12}dt =$

$$= \int \frac{1}{12}t^{-6}dt = \frac{t^{-6+1}}{(-6+1)12} + C = -\frac{1}{60\,(t)^5} + C = -\frac{1}{60\,(3x^4-5)^5} + C.$$

Παράδειγμα (α3):

$$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \begin{bmatrix} \text{Θέτουμε } y = 1 + e^{-x} \\ \text{οπότε } dy = -e^{-x}dx \end{bmatrix} = \int \frac{-1}{y}dy = -\log|y| + C = -\log(1+e^{-x}) + C.$$

Παράδειγμα (α4): $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx = \begin{bmatrix} y = \sqrt{2-x} \Rightarrow x = 2 - y^2 \\ dy = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}dx \Rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{2-x}} = -2dy \end{bmatrix} =$

$$\begin{aligned} &= \int \left(2-y^2\right)^2(-2)dy = -2\int \left(4 - 4y^2 + y^4\right)dx \\ &= -8y + \frac{8y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + C = -8\sqrt{2-x} + \frac{8\left(\sqrt{2-x}\right)^3}{3} - \frac{2\left(\sqrt{2-x}\right)^5}{5} + C \end{aligned}$$

(β) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Από τον κανόνα παραγώγισης του γινομένου έχουμε

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

οπότε

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))'\,dx = \int (f'(x)g(x))\,dx + \int (f(x)g'(x))\,dx$$

και συνεπώς

$$\int (f'(x)g(x))\,dx = f(x)g(x) - \int (f(x)g'(x))\,dx. \tag{1}$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σκοπό να απλουστευθεί η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση.

Παράδειγμα (β1):

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= \int x(\sin x)'\,dx \overset{\text{από }(1)}{=} x\sin x - \int x'\sin x dx\\ &= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα (β2):

$$\begin{aligned}\int xe^{-3x}dx &= \int x\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)'dx \overset{\text{από }(1)}{=} x\frac{e^{-3x}}{-3} - \int x'\frac{e^{-3x}}{-3}dx\\ &= -\frac{xe^{-3x}}{3} - \int \frac{e^{-3x}}{-3}dx = -\frac{xe^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα (β3):

$$\begin{aligned}\int x^2\log x dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x dx \overset{\text{από }(1)}{=} \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}(\log x)'\,dx\\ &= \frac{x^3\log x}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3\log x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2dx\\ &= \frac{x^3\log x}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C\end{aligned}$$

Παράδειγμα (β4):

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}dx &= \int x\frac{2}{3}\left((1+x)^{\frac{3}{2}}\right)'dx \overset{\text{από }(1)}{=} \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int x'(1+x)^{\frac{3}{2}}dx\\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C.\end{aligned}$$

(γ) Ολοκλήρωση Ρητών συναρτήσεων

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι το πηλίκο δύο πολυωνύμων $p(x)$ και $q(x)$. Εξετάζουμε την περίπτωση που ο βαθμός του $p(x)$ είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $q(x)$ (αν είναι $\geq$ εκτελούμε διαίρεση πολυωνύμων και αναγόμαστε στην περίπτωση $\lneqq$).

Η τεχνική ολοκλήρωσης των ρητών συναρτήσεων έγκειται στην ανάλυση του κλάσματος $\frac{p(x)}{q(x)}$ σε απλούστερα κλάσματα. Θα περιγράψουμε πρώτα την ειδική περίπτωση που ο παρανομαστής $q(x)$ έχει πραγματικές ρίζες.

Παράδειγμα (γ1): $\displaystyle\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx$. Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι ώστε

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}.$$

Θα πρέπει

$$\begin{aligned} &A(2x+5) + B(x-3) = 6-x \iff x(2A+B) + (5A-3B) = -x+6\\ \iff\ &2A+B=-1 \text{ και } 5A-3B=6 \iff A=\tfrac{3}{11}, B=-\tfrac{17}{11}.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx = \int \frac{3/11}{x-3}dx + \int \frac{-17/11}{2x+5}dx = \frac{3}{11}\log|x-3| - \frac{17}{22}\log|2x+5| + C.$$

Παράδειγμα (γ2): $\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx.$

Εκτελούμε την διαίρεση του x^3 με το x^2-3x+2 :

$$x^3 = (x^2-3x+2)\underbrace{(x+3)}_{\text{πηλίκο}} + \underbrace{(7x-6)}_{\text{υπόλοιπο}}$$

οπότε έχουμε

$$\frac{x^3}{x^2-3x+2} = x+3+\frac{7x-6}{x^2-3x+2}$$

και το δοθέν ολοκλήρωμα είναι

$$\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx = \int (x+3)dx + \int \frac{7x-6}{x^2-3x+2}dx.$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου ολοκληρώματος στο δεξί μέλος έχουμε

$$\frac{7x-6}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \iff A=-1, B=8.$$

οπότε

$$\int \frac{7x-6}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{8}{x-2}dx = -\log|x-1| + 8\log|x-2| + C$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx = \frac{x^2}{2} + 3x - \log|x-1| + 8\log|x-2| + C.$$

Όταν ο παρανομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες χρησιμοποιούμε δύο τεχνικές ανάλογα με το αν ο αριθμητής είναι σταθερός όρος ή ax.

Παράδειγμα (γ3): $\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx.$

Θα χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο της αντίστροφης εφαπτομένης

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}. \tag{2}$$

Προς τούτο μετασχηματίζουμε τον παρανομαστή ως εξής:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx &= \int \frac{1}{(x-1)^2+4}dx = \int \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx = \begin{bmatrix} y = \frac{x-1}{2} \\ dy = \frac{1}{2}dx \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{2}{y^2+1}dy \overset{\text{από (2)}}{=} \frac{1}{2}\arctan y + C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα (γ4):

$$\int \frac{2x}{x^2-2x+5}dx = \begin{bmatrix} \text{δημιουργούμε τον όρο} \\ (x^2-2x+5)' = (2x-2) \\ 2x = (2x-2)+2 \end{bmatrix} = \int \frac{(2x-2)+2}{x^2-2x+5}dx$$

$$= \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + \int \frac{2}{x^2-2x+5}dx$$

$$\overset{\text{από Παρ.(γ3)}}{=} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx = \begin{bmatrix} y = x^2-2x+5 \\ dy = (2x-2)dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{y}dy = \log|y|+C = \log\left(x^2-2x+5\right)+C.$$

Τελικά

$$\int \frac{2x}{x^2-2x+5}dx = \log\left(x^2-2x+5\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

Με τις παραπάνω τεχνικές (Παρ. γ3 και γ4) μπορούμε να ολοκληρώσουμε κάθε συνάρτηση της μορφής $\dfrac{ax+b}{x^2+\beta x+\gamma}$ όταν $x^2+\beta x+\gamma$ δεν έχει ρίζες.

Παράδειγμα (γ5): $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}dx$ (συνδυασμός των παραπάνω).

Αναλύουμε σε απλούστερα κλάσματα

$$\frac{x^2+x+2}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \iff$$

$$A\left(x^2+x+1\right) + (Bx+C)(x+1) = x^2+x+2 \iff$$

$$(A+B)x^2 + (A+B+C)x + (A+C) = x^2+x+2 \iff$$

$$\begin{bmatrix} A+B=1 \\ A+B+C=1 \\ A+C=2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} A=2 \\ B=-1 \\ C=0 \end{bmatrix}$$

και έχουμε

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}dx = \int \frac{2}{x+1}dx - \int \frac{x}{x^2+x+1}dx$$

Αφού $\displaystyle\int \frac{2}{x+1}dx = 2\log|x+1| + C$, ο υπολογισμός ανάγεται στον εύρεση του

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \begin{bmatrix} \text{δημιουργούμε το } (x^2+x+1)' = (2x+1) \\ 2x = (2x+1)-1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \left[\begin{array}{l} y = x^2+x+1 \\ dy = (2x+1)dx \end{array}\right] = \int \frac{1}{y}dy = \log|y| + C = \log\left(x^2+x+1\right) + C$$

και για το δεύτερο

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1}dx &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{4}{3}\frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}dx = \left[\begin{array}{l} y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ dy = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \end{array}\right] \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{y^2+1}dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan y + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C \end{aligned}$$

Τελικά

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}dx = 2\log|x+1| - \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Εφαρμογες Ολοκληρωσης - Εμβαδα

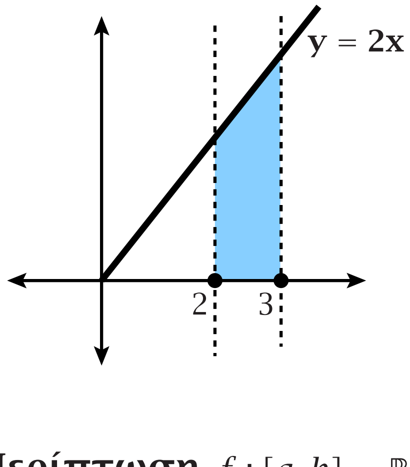
Χρησιμοποιούμε τα ορισμένα ολοκληρώματα για την εύρεση εμβαδών χωρίων που φράσσονται από γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων.

(Α) Περίπτωση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Το εμβαδόν E του χωρίου που φράσσεται από το γράφημα της f, τον $x-$άξονα και τις ευθείες $x=a, x=b$ είναι

$$E = \int_a^b f(x)dx.$$

Παράδειγμα: $f:[2,3]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x$.



Το εμβαδόν E του χωρίου που φράσσεται από το γράφημα της f, τον $x-$άξονα και τις ευθείες $x=2, x=3$ είναι

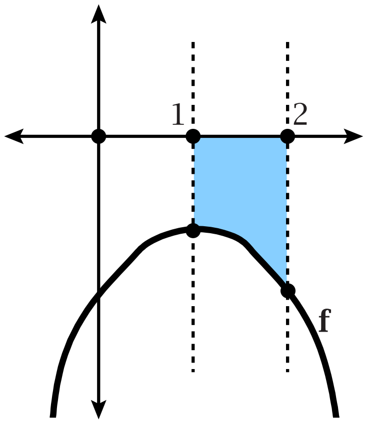
$$E = \int_2^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_{x=2}^{x=3} = 9-4 = 5 = \frac{1}{2}(6+4)(3-2)$$

(Β) Περίπτωση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Το εμβαδόν E του χωρίου που φράσσεται από το γράφημα της f, τον $x-$άξονα και τις ευθείες $x=a, x=b$ είναι

$$E = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Παράδειγμα: $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=-(x-1)^2-1$.

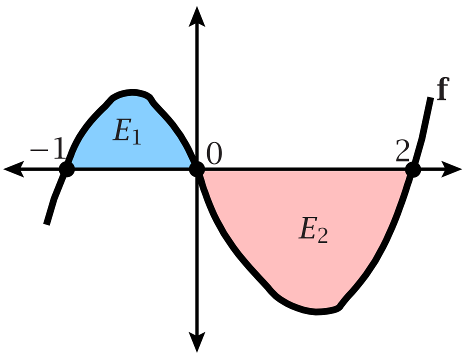


Το εμβαδόν E του χωρίου που φράσσεται από το γράφημα της f, τον $x-$άξονα και τις ευθείες $x=1, x=2$ είναι

$$\begin{aligned} E &= -\int_1^2 \left(-(x-1)^2-1\right) dx \\ &= -\int_1^2 \left(-x^2+2x-2\right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(Γ) Περίπτωση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και η f παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές στο $[a,b]$. Σε αυτήν την περίπτωση χωρίζουμε το $[a,b]$ σε υποδιαστήματα σε κάθε ένα από τα οποία είτε είναι $f(x)\geq 0$ είτε $f(x)\leq 0$.

Παράδειγμα: $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3-x^2-2x$.



Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία που η f τέμνει τον $x-$άξονα:

$$x^3-x^2-2x = x(x^2-x-2)=0$$

$$\Rightarrow x=-1,0,2.$$

Στο διάστημα $[-1,0]$ η f έχει θετικές τιμές συνεπώς το εμβαδόν E_1 που φράσσεται από το γράφημα της f και τον $x-$άξονα είναι

$$E_1 = \int_{-1}^0 \left(x^3-x^2-2x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{x=-1}^{x=0} = \frac{5}{12}$$

Στο διάστημα $[0,2]$ η f έχει αρνητικές τιμές συνεπώς το εμβαδόν E_2 που φράσσεται από το γράφημα της f και τον $x-$άξονα είναι

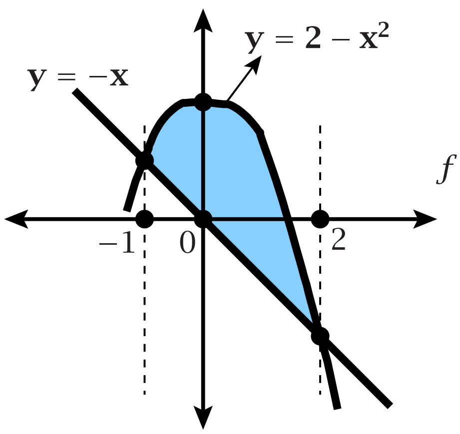
$$E_2 = -\int_0^2 \left(x^3-x^2-2x\right) dx = -\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{x=0}^{x=2} = -\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

Συνεπώς το ολικό εμβαδόν είναι $E=E_1+E_1=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}$.

(Δ) Περίπτωση Εμβαδόν χωρίου που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Το εμβαδόν E του χωρίου που φράσσεται από το γράφημα της f, το γράφημα της g και τις ευθείες $x = a, x = b$ είναι

$$E = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Παράδειγμα: Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = 2 - x^2$ και την ευθεία $y = -x$.



Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία που η παραβολή $y = 2 - x^2$ τέμνει την ευθεία $y = -x$.

$2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, 2.$

Αφού στο διάστημα $[-1, 2]$ ισχύει

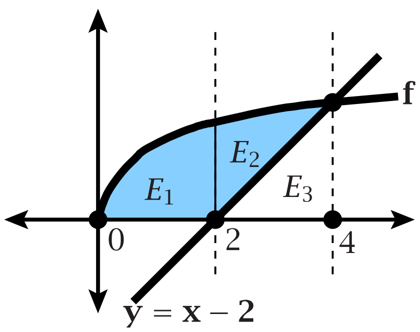
$$2 - x^2 \geq -x,$$

το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{-1}^{2} \left[\left(2 - x^2\right) - (-x)\right] dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{x=-1}^{x=2} = \frac{9}{2}.$$

Σημείωση: Η τεχνική διαίρεσης σε υποδιαστήματα είναι χρήσιμη όταν οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις που φράσσουν το χωρίο είναι περισσότερες από δύο.

Παράδειγμα: Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x) = \sqrt{x}$, τον $x-$άξονα και την ευθεία $y = x - 2$.



Το σημείο στο οποίο το γράφημα της f τέμνει την ευθεία $y = x - 2$ είναι

$$x - 2 = \sqrt{x}, x > 2 \Rightarrow$$
$$x^2 - 4x + 4 = x, x > 2 \Rightarrow$$
$$x = 4, y = 2.$$

Επίσης το γράφημα της f τέμνει τον $x-$άξονα στο $(0, 0)$ και η ευθεία $y = x - 2$ τέμνει τον $x-$άξονα στο $(2, 0)$.

Η ευθεία $x = 2$ χωρίζει το χωρίο σε δυο υποχωρία με εμβαδά E_1 και E_2 τα οποία υπολογίζουμε ως εξής:

$$E_1 = \int_0^2 (\sqrt{x} - 0)\, dx = \int_0^2 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

και

$$E_2 = \int_2^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right] dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{x=2}^{x=4} = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}$$

οπότε $E = E_1 + E_2 = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{10-4\sqrt{2}}{3} = \frac{10}{3}$.

Ο υπολογισμός του ζητουμένου εμβαδού E στο τελευταίο Παράδειγμα μπορεί να γίνει και με τον εξής απλούστερο τρόπο: το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(2,0),(4,0)$ και $(4,2)$ έχει εμβαδόν

$$E_3 = \frac{1}{2}\,(\text{ΒΑΣΗ})\,(\text{ΥΨΟΣ})\,\frac{1}{2}\,(2)\,(2) = 2 = \int_2^4 (x-2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{x=2}^{x=4} = 2$$

και, προφανώς, $E = E_1 + E_2 = (E_1 + E_2 + E_3) - E_3$. Όμως, το εμβαδόν $E_1 + E_2 + E_3$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την $f(x) = \sqrt{x}$, τον $x-$άξονα και την ευθεία $x = 4$, οπότε

$$E_1 + E_2 + E_3 = \int_0^4 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=4} = \frac{2\sqrt{64}}{3} = \frac{16}{3} \Longrightarrow E = E_1 + E_2 = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}.$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(a)} \int 92x^3\left(x^4-7\right)^{22} dx \qquad \text{(b)} \int \frac{2}{(x-3)^2}dx$$

$$\text{(c)} \int \frac{2x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx \qquad \text{(d)} \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}$$

$$\left[\text{(a)}: \left(x^4-7\right)^{23} \ \text{(b)}: \frac{-2}{x-3} \ \text{(c)}: \frac{4}{3}\sqrt{x^3-1} \ \text{(d)}: \frac{1}{2}\log\left|x^2+2x+3\right|\right] + C$$

2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(a)} \int x\sin x dx \quad \text{(b)} \int xe^x dx \quad \text{(c)} \int 2x^2e^x dx \quad \text{(d)} \int e^x\cos x dx$$

$$\left[\begin{array}{llll} \text{(a)}: & -x\cos x+\sin x & \text{(b)}: & -xe^x+e^x \\ \text{(c)}: & 2x^2e^x-4xe^x+4e^x & \text{(d)}: & \frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x) \end{array}\right] + C.$$

3. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(a)} \int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx \qquad \text{(b)} \int \frac{x^2}{x^2-1}dx$$

$$\text{(c)} \int \frac{1}{x^2+2x+3}dx \qquad \text{(d)} \int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}\,dx$$

$$\left[\begin{array}{llll} \text{(a)}: & 4\log|x-3|-\log|x+2| & \text{(b)}: & x-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{2}\log|x-1| \\ \text{(c)}: & \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) & \text{(d)}: & \frac{1}{2}\log|x+2|+\frac{5}{6}\log|3x-2|-\log|x| \end{array}\right] + C.$$

4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=x^2$ και την ευθεία $y=2-x$. [Απ: $\frac{9}{2}$]

5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x)=-x^2-2x$ και $g(x)=x^2-4$. [Απ: 9]