

# Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

## Κεφάλαιο #5

### ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω  $X, Y$  σύνολα. Συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  από το  $X$  στο  $Y$  ονομάζουμε μια σχέση (ή αλλιώς κανόνα) που σε κάθε  $x \in X$  αντιστοιχίζει ένα μοναδικό  $y \in Y$  το οποίο συμβολίζουμε με  $f(x)$ .

Το σύνολο  $X$  λέγεται **πεδίο ορισμού** και το  $Y$  **πεδίο τιμών**.

Το σύνολο  $\{f(x) \mid x \in X\} \stackrel{\text{συμβολ.}}{\equiv} f(X) \subseteq Y$  ονομάζεται **εικόνα της  $f$** .

Δύο συναρτήσεις  $f, g$  με πεδίο ορισμού  $X$  είναι **ίσες** αν  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in X$ .

Μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  θα λέγεται **ένα προς ένα (1-1)** αν

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  θα λέγεται **επί του  $Y$**  αν  $f(X) = Y$ , ή ισοδύναμα, για κάθε  $y \in Y$  υπάρχει  $x \in X$  έτσι ώστε  $y = f(x)$ .

**Παράδειγμα 1:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^2$ .

Η  $f$  δεν είναι επί αφού για το  $y = -5$  δεν υπάρχει  $x \in \mathbb{R}$  με  $x^2 = -5$ .

Η  $f$  δεν είναι 1-1 αφού  $f(-5) = 25 = f(5)$ .

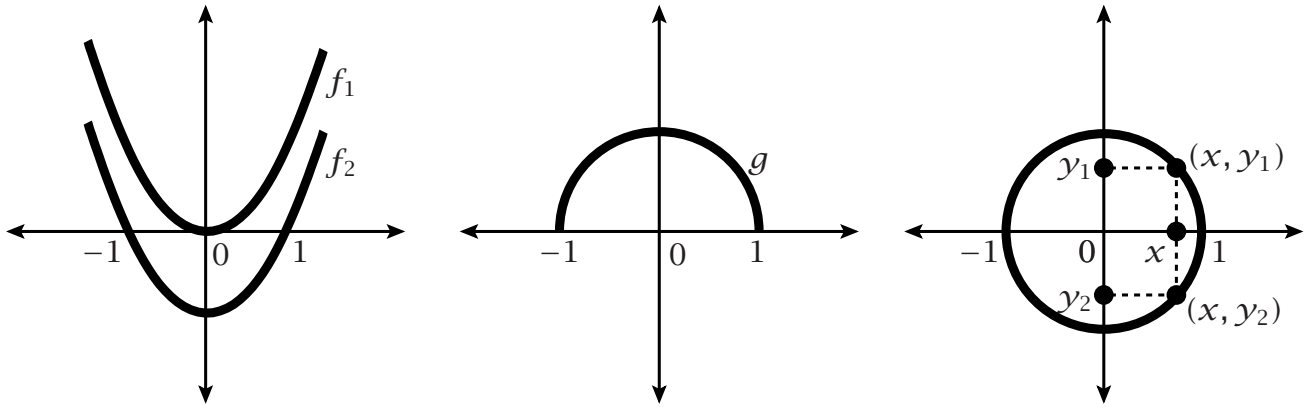
Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της  $f$  στο διάστημα  $[0, +\infty)$  παίρνουμε μια άλλη συνάρτηση  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με ίδιο τύπο  $g(x) = x^2$ , η οποία είναι 1-1 και επί. Η συνάρτηση  $g$  λέμε ότι είναι **περιορισμός** της  $f$ .

Η συνάρτηση  $h : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  με  $h(x) = x^2$  είναι και 1-1 και επί του  $[0, +\infty)$ .

Μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  θα λέγεται **πραγματική** αν  $X \subseteq \mathbb{R}$  και  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Από εδώ και στο εξής η λέξη συνάρτηση θα σημαίνει πάντα πραγματική συνάρτηση.

**Γραφική παράσταση:** Έστω  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση. Το σύνολο των σημείων  $(x, y)$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $y = f(x)$  ονομάζεται **γραφική παράσταση** ή **γράφημα** της  $f$ . Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζεται αριστερά η γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f_2(x) = x^2 - 1$  και στην μέση η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Δεξιά απεικονίζεται ο κύκλος

που ως σύνολο σημείων του επιπέδου δεν είναι γράφημα συνάρτησης.



**Σύνθεση συναρτήσεων:** Έστω συναρτήσεις  $f : X \rightarrow Y$  και  $g : Y \rightarrow Z$  με  $f$  επί. Η σύνθεση των  $f$  και  $g$  είναι η συνάρτηση

$$g \circ f : X \rightarrow Z \text{ με τύπο } (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

**Παράδειγμα 2:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 2x + 1$  και  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = x^3$ . Τότε  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^3$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ** Αν η συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1 τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση  $g : f(X) \rightarrow X$  με την ιδιότητα για κάθε  $x \in X$ ,  $(g \circ f)(x) = x$  και για κάθε  $y \in f(X)$ ,  $(f \circ g)(y) = y$ .

Η  $g$  λέγεται **αντίστροφη** της  $f$  και συμβολίζεται με  $f^{-1}$ .

**Παράδειγμα 3:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 2x + 1$ .

Έχουμε  $y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$  και η συνάρτηση  $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$  ικανοποιεί τις σχέσεις

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x$$

και

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y.$$

**Παράδειγμα 4:**  $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  με  $f(x) = x^2$ .

Έχουμε  $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$  και  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .

## ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Η συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  θα λέγεται

**αύξουσα** αν για κάθε  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .

**γνησίως αύξουσα** αν για κάθε  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

**φθίνουσα** αν για κάθε  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ .

**γνησίως φθίνουσα** αν για κάθε  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x^2, & \text{αν } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[0, 1]$  και αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ . Επίσης, είναι ταυτόχρονα και αύξουσα και φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ . Στο διάστημα  $(-\infty, 1]$  δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα. Το ίδιο και στο  $\mathbb{R}$ .

Μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  λέμε ότι έχει **τοπικό μέγιστο στο  $x_0$**  αν υπάρχει διάστημα  $(a, b) \subset X$  με  $x_0 \in (a, b)$  έτσι ώστε  $f(x_0) \geq f(x)$  για κάθε  $x \in (a, b)$ .

Μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  λέμε ότι έχει **τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$**  αν υπάρχει διάστημα  $(a, b) \subset X$  με  $x_0 \in (a, b)$  έτσι ώστε  $f(x_0) \leq f(x)$  για κάθε  $x \in (a, b)$ .

Τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  λέγονται τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της  $f$ . Ανάλογα ορίζεται το ολικό μέγιστο (αντίστοιχα, ελάχιστο): η  $f$  έχει **ολικό μέγιστο** (αντ. **ελάχιστο**) στο  $x_0$  αν  $f(x_0) \geq f(x)$  (αντ.  $f(x_0) \leq f(x)$ ) για κάθε  $x \in X$ .

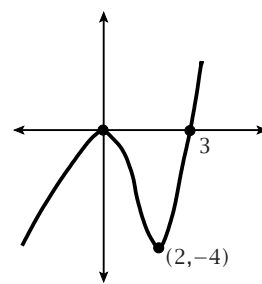
Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^2$  έχει ολικό ελάχιστο στο 0 και η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = -x^2 - 1$  έχει ολικό μέγιστο στο -1.

**Παράδειγμα 5:** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x^2$ .

της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.

Πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών είναι όλο το  $\mathbb{R}$ .

Η  $f$  δεν είναι 1-1 αφού  $f(0) = 0 = f(3)$ . Επίσης η  $f$  έχει τοπικό ελάχιστο στο 2 και τοπικό μέγιστο στο 0. Δεν υπάρχει ολικό ελάχιστο ή μέγιστο.

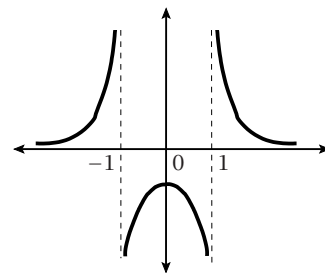


**Παράδειγμα 6:** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ .

Πεδίο ορισμού:  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  αφού  $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1, 1$ .

Εικόνα της  $f$ :  $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$  αφού  $y = \frac{1}{x^2 - 1} \Leftrightarrow$

$x^2 = \frac{y+1}{y}, y \neq 0 \Rightarrow (y+1)y > 0 \Rightarrow y > 0$  ή  $y < -1$ .



Η  $f$  δεν είναι επί του  $\mathbb{R}$  και δεν είναι 1-1 (αφού  $f(2) = 1 = f(-2)$ ). Έχει τοπι-

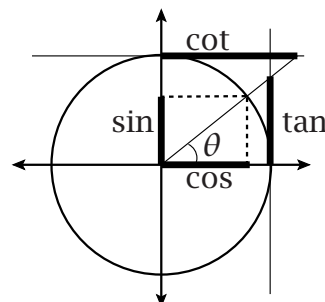
κό μέγιστο στο σημείο  $x_0 = 0$ . Επίσης η  $f$  δεν έχει σε κανένα σημείο τοπικό ελάχιστο και ούτε έχει ολικό μέγιστο ή ολικό ελάχιστο.

Σημειωτέον ότι η γραφική παράσταση της  $f$  και οι παραπάνω πληροφορίες δεν μπορούν να εξαχθούν με βάση τα μέχρι τώρα διδαχθέντα. Παρουσιάζονται μόνο ως παραδείγματα των εννοιών των ακροτάτων που δόθηκαν παραπάνω.

### Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

Οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

ημίτονο	$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$
συνημίτονο	$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$
εφαπτομένη	$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$
συνεφαπτομένη	$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$



όπου  $k \in \mathbb{Z}$  ακέραιος, ορίζονται με χρήση του κύκλου ακτίνας 1 (τριγωνομετρικός κύκλος) για κάθε αριθμό (γωνία)  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Γενικά, για  $x \in \mathbb{R}$  υπάρχει μοναδικός αριθμός  $\theta_x \in [0, 2\pi)$  και ακέραιος  $k$  έτσι ώστε  $x = 2k\pi + \theta_x$  και θέτουμε  $f(x) = f(\theta_x)$  όπου  $f$  συμβολίζει κάθε μία από τις 4 τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Τα πεδία ορισμού και τιμών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι αυτά που δίνονται παραπάνω. Καμία εκ των τεσσάρων δεν έχει την ιδιότητα να είναι 1-1. Όμως, περιορίζοντας κατάλληλα το πεδίο ορισμού μπορούμε να επιτύχουμε το 1-1. Για παράδειγμα, η εφαπτομένη είναι 1-1 όταν την περιορίσουμε στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  και έτσι η συνάρτηση

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

έχει αντίστροφη που συμβολίζεται με  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ή  $\tan^{-1}$ .

Όμοια η συνάρτηση  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  είναι 1-1 και επί.

**Εκθετική συνάρτηση:**  $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$  είναι 1-1, αύξουσα και το πεδίο τιμών της είναι το  $(0, +\infty)$ . Η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση του λογαρίθμου  $\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

## ΟΡΙΑ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ

**ΟΡΙΣΜΟΣ** Έστω  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  και  $a \in \mathbb{R}$ . Θα λέμε ότι το **όριο** της  $f$  όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$  είναι  $a$ , και το συμβολίζουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , εάν οι τιμές  $f(x)$  της συνάρτησης πλησιάζουν το  $a$  όταν το  $x$  πλησιάζει το  $x_0$ .

**Παράδειγμα 7:** Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = 5x - 3$ . Τότε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  διότι για  $x$  κοντά στο 1 οι τιμές  $5x - 3$  είναι κοντά στο 2.

**Σημείωση:** Για τον ορισμό του ορίου  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  δεν απαιτείται το  $x_0$  να ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f$ . Αρκεί να υπάρχουν σημεία  $x$  οσοδήποτε κοντά στο  $x_0$  στα οποία να ορίζεται το  $f(x)$ .

**ΑΥΣΤΗΡΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ** Έστω  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  και  $a \in \mathbb{R}$ . Έστω σημείο  $x_0 \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε το πεδίο ορισμού  $X$  της  $f$  να περιέχει ένα ανοικτό διάστημα της μορφής  $(x_0, C)$  ή  $(C, x_0)$ . Θα λέμε ότι το **όριο** της  $f$  όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$  είναι  $a$ , και το συμβολίζουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , όταν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  έτσι ώστε για κάθε  $x \in X$  με  $0 < |x - x_0| < \delta$  τότε  $|f(x) - a| < \epsilon$ .

**Παράδειγμα 7:** Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = 5x - 3$ . Τότε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  διότι: για δοθέν  $\epsilon > 0$  αναζητούμε  $\delta > 0$  έτσι ώστε να ισχύει

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x) - 2| < \epsilon.$$

Θέλουμε  $|f(x) - 2| = |(5x - 3) - 2| = 5|x - 1| < \epsilon$  οπότε, επιλέγοντας  $\delta = \frac{\epsilon}{5}$  έχουμε

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |(5x - 3) - 2| = 5|x - 1| < 5 \frac{\epsilon}{5} = \epsilon.$$

**Παράδειγμα 8:** Έστω η συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{2x}$  όπου  $X = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ . Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{1 - \sqrt{1-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})}{2x(1 + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1 + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (απόδειξη αργότερα).

**ΟΡΙΣΜΟΣ** Έστω  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$ . Θα λέμε ότι η  $f(x)$  είναι **συνεχής στο  $x_0$**  όταν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Μία συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε  $x \in X$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ** Όλες οι συναρτήσεις που ορίζονται με ενιαίο τύπο είναι συνεχείς.

Για παράδειγμα οι ακόλουθες συναρτήσεις

$$\begin{array}{ll} f(x) = c, c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά} & f(x) = \sin x \\ f(x) = x^m, m \text{ ακέραιος} & f(x) = \cos x \\ f(x) = x^a, a \in \mathbb{R} & f(x) = \tan x \\ f(x) = e^x & f(x) = \cot x \\ f(x) = \log x & \end{array}$$

είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού των.

**Ιδιότητες:** Έστω  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $x_0 \in X$ . Τότε οι παρακάτω συναρτήσεις

$$\begin{array}{ll} \text{άθροισμα/διαφορά} & (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \\ \text{γινόμενο} & (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\ \text{πηλίκο} & (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \\ \text{σύνθεση} & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

όπου και όταν αυτές ορίζονται, είναι συνεχείς.

### Παραδείγματα

(9) Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{1-x}$  ορίζεται για κάθε  $x \in (-\infty, 1]$  και είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Για παράδειγμα, στα σημεία  $x = 1$  και  $-3$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3) = \sqrt{1 - (-3)} = 2.$$

(10) Εξετάζουμε ως προς την συνέχεια την  $g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{2x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1/4 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

Οι συναρτήσεις  $1 - \sqrt{1-x}$  και  $2x$  είναι συνεχείς άρα και το πηλίκο  $\frac{1 - \sqrt{1-x}}{2x}$  είναι συνεχής εκεί που ορίζεται, δηλαδή στο  $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ . Άρα η  $g$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο  $x_0 \neq 0$  του πεδίου ορισμού της  $(-\infty, 1]$ . Μένει να εξετάσουμε αν η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο 0. Για να είναι συνεχής στο 0 θα πρέπει να υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  και να ισούται με την τιμή της  $g$  στο 0, δηλαδή με το  $g(0) = 1/4$ . Στο Παράδειγμα 8 υπολογίσαμε αυτό το όριο και το βρήκαμε  $1/4$  συνεπώς η  $g$  είναι και στο 0 συνεχής.

(11) Έστω η συνάρτηση  $h(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x - \frac{\pi}{2}) + \sin^2(x + \frac{\pi}{2})}{\log x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

Αφού δίνεται το  $h(0) = 0$ , προφανώς, το πεδίο ορισμού της  $h$  είναι το

$[0, +\infty)$  και όχι το  $(0, +\infty)$ . Όπως προηγουμένως η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο  $x_0 \in (0, +\infty)$ . Εξετάζουμε την συνέχεια στο 0 υπολογίζοντας το  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  ως εξής:

$$\left| \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\log x} \right| \leq \frac{|\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)| + |\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)|}{|\log x|} \leq \frac{1 + 1}{|\log x|} \rightarrow 0$$

αφού  $\log x \rightarrow -\infty$  όταν το  $x \rightarrow 0$  και άρα  $|\log x| \rightarrow +\infty$  όταν το  $x \rightarrow 0$ . Άρα η  $h$  είναι συνεχής και στο 0.

Από προηγούμενη ΠΡΟΤΑΣΗ γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1 τότε ορίζεται η αντίστροφή της

$$f^{-1} : f(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

και ισχύει η εξής

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1 και συνεχής τότε και η αντίστροφη  $f^{-1} : f(X) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής.

### Παραδείγματα

(12) Η συνάρτηση  $f(x) = 1 - 2 \log(1 - x)$ ,  $x \in (-\infty, 1)$  είναι 1-1 διότι

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \log(1 - x_1) = \log(1 - x_2) \stackrel{\log 1-1}{\Leftrightarrow} 1 - x_1 = 1 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Αφού η  $f$  είναι συνεχής, η αντίστροφη συνάρτηση γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής πριν την υπολογίσουμε

$$y = 1 - 2 \log(1 - x) \Rightarrow \log(1 - x) = \frac{1 - y}{2} \Rightarrow 1 - x = e^{\frac{1-y}{2}} \Rightarrow f^{-1}(y) = 1 - e^{\frac{1-y}{2}}.$$

(13) Η συνάρτηση  $g(x) = e^{-2x} - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι 1-1 διότι

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow e^{-2x_1} - 1 = e^{-2x_2} - 1 \stackrel{[e^x 1-1]}{\Leftrightarrow} -2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

και η αντίστροφή της είναι

$$y = e^{-2x} - 1 \Rightarrow e^{-2x} = y + 1 \Rightarrow -2x = \log(y + 1) \Rightarrow x = -\frac{\log(y + 1)}{2}$$

δηλαδή,  $f^{-1}(x) = -\frac{\log(x+1)}{2}$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ .

Σημείωση: Αν μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow f(X) \subset \mathbb{R}$  δεν είναι 1-1 τότε, παρ' όλο που δεν ορίζεται η αντίστροφη, έχει έννοια η **αντίστροφη εικόνα** ενός σημείου  $b \in f(X)$  ή ενός συνόλου  $B \subset f(X)$  ως εξής:

$$f^{-1}(b) = \{x \in X \mid f(x) = b\} \quad \text{και} \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Για παράδειγμα, η  $f(x) = x^2$  δεν είναι 1-1 άρα δεν υπάρχει η αντίστροφη αλλά

$$f^{-1}(4) = \{x \in X \mid x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$$

και

$$f^{-1}([4, 25]) = \{x \in X \mid 4 \leq x^2 \leq 25 \in B\} = [-5, -2] \cup [2, 5].$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ (ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ)** Αν  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής τότε η εικόνα  $f([a, b])$  της  $f$  είναι ένα κλειστό διάστημα  $[\xi, \eta]$ .

Ειδικότερα, η εικόνα της  $f$  περιλαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των  $f(a)$  και  $f(b)$ . Το ίδιο ισχύει για κάθε υποδιάστημα  $[c, d]$  του  $[a, b]$ .

**ΠΟΡΙΣΜΑ I** Μια συνεχής συνάρτηση  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  έχει πάντα ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.

**ΠΟΡΙΣΜΑ II** Έστω  $I$  διάστημα στο  $\mathbb{R}$  και  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής. Αν  $a, b \in I$  και  $f(a)f(b) < 0$  τότε υπάρχει σημείο  $x_0 \in I$  έτσι ώστε  $f(x_0) = 0$ .

### Παραδείγματα

(14) Η εξίσωση  $x^3 - 4x^2 - 65 = 0$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $\mathbb{R}$  :

Θεωρούμε την συνάρτηση  $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο  $[0, 10]$  και ισχύει  $f(0) \cdot f(10) = (-65) \cdot 535 < 0$ . Άρα υπάρχει  $x_0 \in [0, 10]$  έτσι ώστε  $f(x_0) = 0$  δηλαδή  $x_0^3 - 4x_0^2 - 65 = 0$

(15) Λύση της εξίσωσης  $\log x = \frac{1}{x} - 1$ .

Προφανώς το  $x = 1$  είναι λύση αφού  $\log 1 = 0$ . Εξετάζουμε αν υπάρχουν άλλες.

Η συνάρτηση  $f(x) = \log x - \frac{1}{x} + 1$  ορίζεται για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  και είναι γνησίως αύξουσα αφού

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + \log x_1 < 1 + \log x_2 \\ -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \log x_1 + 1 - \frac{1}{x_1} < \log x_2 + 1 - \frac{1}{x_2}$$

και άρα  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Συνεπώς η μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι το  $x = 1$ . Λύσεις στο  $(-\infty, 0]$  δεν αναζητούμε διότι για  $x < 0$  δεν ορίζεται ο λογάριθμος.



## Ασκήσεις

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις και με χρήση του ορισμού να εξετάσετε αν είναι 1-1 :

$$f_1(x) = 2 - 2 \log(x - 1), \quad f_2(x) = -e^{-x} + e^x, \quad f_3(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}},$$

$$f_4(x) = 1 - 3 \sin(2x), \quad f_5(x) = x^2 - x. \quad [\text{Απ: } f_4, f_5 \text{ όχι } 1-1]$$

2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{3x}}$  είναι 1-1 και, αν ναι, να βρείτε την  $f^{-1}$ . [Απ:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \log\left(\frac{1-x}{x}\right)$ ]

3. Να εξετάσετε αν η  $f(x) = 8x^3 + 1$  είναι 1-1 και να βρείτε το  $f^{-1}(2)$ .

$$[\text{Απ: } \frac{1}{2}]$$

4. Υπολογίστε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - x}}{x}$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{x^2 - 5x + 6}$ . [Απ:  $\frac{1}{6}, 4$ ]

5. Αν η αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  διέρχεται από το σημείο  $A = (2, 4)$  να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(3 + e^{x-1}) = 2$ .

$$[\text{Απ: } 3 + e^{x-1} = f(2) = 4 \Rightarrow x = 1]$$

6. Να βρείτε το  $a \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 3ax - 4 & \text{αν } x \neq 1 \\ 5 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$  να είναι συνεχής. [Απ:  $a = 3$ ]

7. Δείξτε ότι η  $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{αν } x < 3 \\ 5 - x & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$  είναι συνεχής στο  $x = 3$ .

Υπόδειξη: υπολογίστε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  όταν  $x < 3$  και όταν  $x > 3$ .

8. Αν  $f(x) = x^3 - x^2 + x$  να δείξετε ότι υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $f(c) = 10$ .

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) - 10$  με πεδίο ορισμού κατάλληλο  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  και εφαρμόστε το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

9. Έχει ρίζες στο  $\mathbb{R}$  η εξίσωση  $e^x = 2 - 2x$ ? Αν ναι πόσες? [Απ: μία]

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι, με κοινό πεδίο ορισμού όλο το  $\mathbb{R}$ , μια γνησίως αύξουσα και μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση μπορούν έχουν μόνο μια κοινή τιμή.

10. Να δείξετε ότι η γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^5 + 8x$  και  $g(x) = -e^x$  τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο  $x_0 \in (-1, 0)$ .

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) - g(x)$  και, όπως στην άσκηση 9, δείξτε ότι η εξίσωση  $h(x) = 0$  έχει μία ακριβώς λύση.