Κατανομές τυχαίων μεταβλητών

Κανονική κατανομή

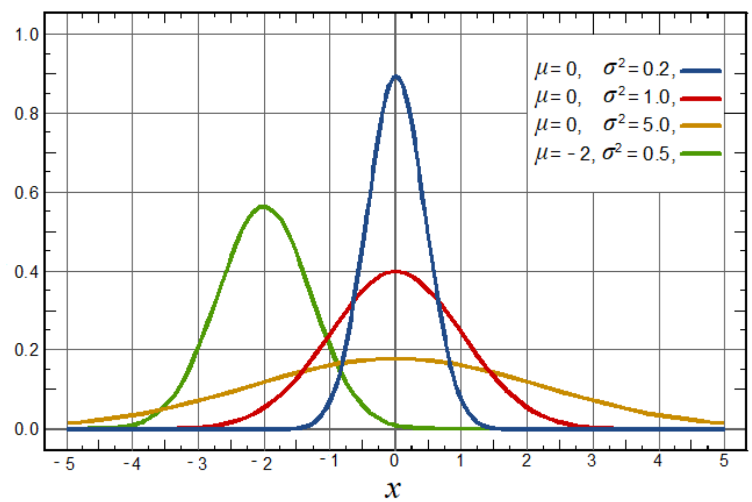
Η κανονική κατανομή θεωρείται η σπουδαιότερη κατανομή της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής, καθώς τα περισσότερα φαινόμενα περιγράφονται ικανοποιητικά από μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή ή κάτω από προϋποθέσεις οι περισσότερες κατανομές μπορούν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή. Έχει μοναδικές μαθηματικές, πιθανοθεωρητικές και στατιστικές ιδιότητες, οι οποίες αξιοποιούνται στη στατιστική συμπερασματολογία. Αποτελεί τη θεμελιώδη κατανομή για τη στατιστική συμπερασματολογία.

Η κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma)$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty, \qquad \sigma > 0$$

όπου μ και σ είναι οι παράμετροι της κατανομής, για τις οποίες ισχύει:

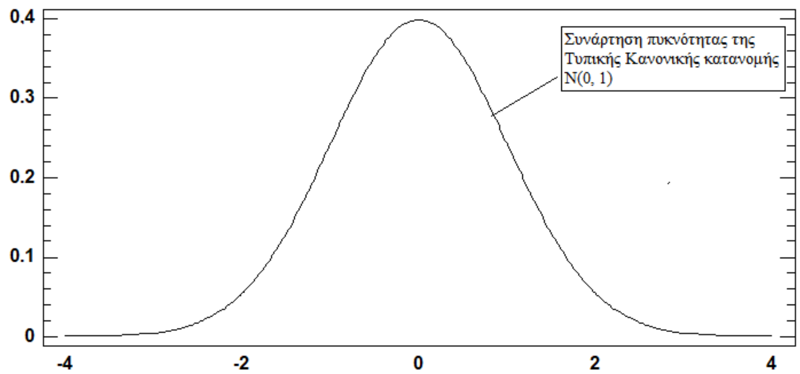
$$E(X) = \mu, \qquad Var(X) = \sigma^2, \quad \text{και} \quad \sigma(X) = \sigma$$



Γραφικές παραστάσεις κανονικής κατανομής για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων μ και σ^2.

Ειδική περίπτωση της κανονικής κατανομής είναι η **τυπική κανονική κατανομή** ***N(0, 1)*** με μέση τιμή $\mu = 0$, τυπική απόκλιση $\sigma = 1$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < +\infty,$$



Γραφική παράσταση της τυπικής κανονικής κατανομής N(0, 1).

Η κανονική κατανομή έχει την ιδιότητα να τυποποιείται. Δηλαδή:

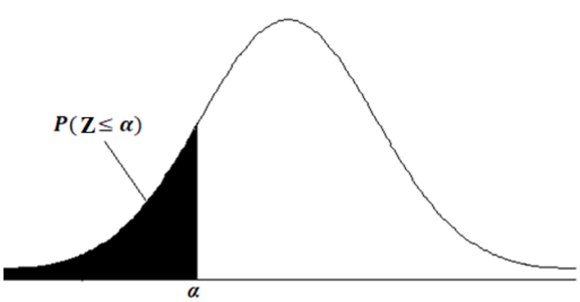
Αν η τυχαία μεταβλητή *X* ακολουθεί κανονική κατανομή N(μ, σ), τότε η τυχαία μεταβλητή

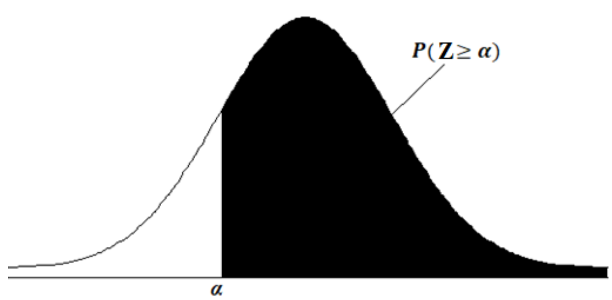
$$\boldsymbol{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \qquad (\mathbf{1})$$

ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή N(0, 1).

Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα διότι υπάρχουν πίνακες που δίνουν την πιθανότητα

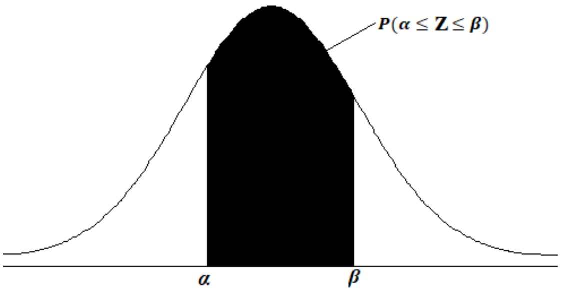
$$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \ f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

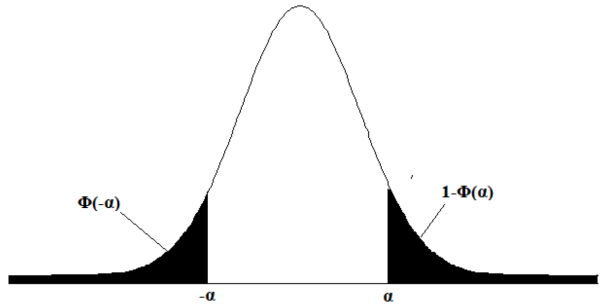




$P(Z \leq \alpha) = \Phi(\alpha)$

$P(Z \geq \alpha) = 1 - P(Z < a) = 1 - \Phi(\alpha)$





$$P(\alpha \leq Z \leq \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \qquad \Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$$

Με βάση την ιδιότητα (1) που μετατρέπει οποιαδήποτε κανονική κατανομή N(μ, σ) στην τυπική κανονική κατανομή N(0, 1), τις παρακάτω σχέσεις και τον **πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής** (σελ. 19) μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες οποιασδήποτε κανονικής κατανομής N(μ, σ) σε οποιοδήποτε διάστημα (α, β) (άσκηση 5, σελ. 6):

- **i)** $\boldsymbol{P(Z \leq \alpha) = \Phi(\alpha)}$
- **ii)** $\boldsymbol{P(Z \geq \alpha) = 1 - \Phi(\alpha)}$
- **iii)** $\boldsymbol{P(\alpha \leq Z \leq \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}$
- **iv)** $\boldsymbol{\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)}$

Πρόταση: Αν $X_1,\ X_2, \dots, X_\nu$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν *κανονική* κατανομή με μέση τιμή *μ* και τυπική απόκλιση *σ*, δηλαδή $X_i \sim N(\mu,\ \sigma),\ i = 1, 2, \dots, \nu$ τότε:

$$S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim N(\nu\mu, \sigma\sqrt{\nu}) \qquad \textit{και}$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu}{\nu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right)$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν $X_1,\ X_2, \dots, X_\nu$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή με μέση τιμή $E(X_i) = \mu$, διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$ και τυπική απόκλιση $\sigma(X_i) = \sigma,$ τότε για μεγάλα ν (θεωρητικά για ν⟶ ∞), κατά προσέγγιση έχουμε:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu}{\nu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) \qquad \textit{και} \qquad S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim N(\nu\mu, \sigma\sqrt{\nu})$$

Διωνυμική κατανομή $\boldsymbol{B(\nu, p)}$

Εκτελούμε ένα πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα. Το ένα το θεωρούμε ως επιτυχία και το άλλο ως αποτυχία. Έστω p η πιθανότητα επιτυχίας, τότε $1-p$ είναι η πιθανότητα αποτυχίας. Το πείραμα εκτελείται ν φορές. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών στις ν επαναλήψεις του πειράματος. Τότε θα λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί *διωνυμική* κατανομή, $\boldsymbol{X \sim B(\nu, p)}$ και η πιθανότητα να έχουμε x επιτυχίες δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{P(X=x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x}} \; , \qquad \boldsymbol{x = 0, 1, 2, \ldots, \nu}$$

Η μέση τιμή, η διασπορά και η τυπική απόκλιση της διωνυμικής κατανομής δίνονται από τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{E(X) = \mu = \nu p} \,, \qquad \boldsymbol{Var(X) = \sigma^2 = \nu p(1-p)} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\sigma = \sqrt{\nu p(1-p)}} \,.$$

<u>Παράδειγμα:</u> Μια μεγάλη ποσότητα μήλων περιέχει 2% χαλασμένα μήλα. Παίρνουμε 4 μήλα τυχαία. Να βρεθούν οι πιθανότητες: i) Ακριβώς ένα μήλο να είναι χαλασμένο, ii) Κανένα μήλο δεν είναι χαλασμένο, iii) Τουλάχιστον ένα μήλο να είναι χαλασμένο.

Θεωρούμε ως επιτυχία {ένα μήλο να είναι χαλασμένο} με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.02$. Τότε η πιθανότητα αποτυχίας είναι $1 - p = 1 - 0.02 = 0.98$.

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (χαλασμένων μήλων), όταν επιλέγουμε τυχαία $\nu = 4$ μήλα. Τότε η τ.μ. X θα ακολουθεί διωνυμική κατανομή, $X \sim B(\nu = 4, p = 0.02)$ και η πιθανότητα να έχουμε x επιτυχίες δίνεται από τη σχέση:

και $\boldsymbol{P(X=x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x}, \;\; x = 0, 1, 2, \ldots, \nu}$

i) $P(X=1) = \binom{4}{1} 0.02^1 (1-0.02)^{4-1} = \frac{4!}{1!3!} 0.02 \cdot 0.98^3 = 0.0753$ ή 7.53%

ii) $P(X=0) = \binom{4}{0} 0.02^0 (1-0.02)^{4-0} = \frac{4!}{0!4!} \, 1 \cdot 0.98^4 = 0.92$ ή 92%

iii) $P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$ ή

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{4}{0} 0.02^0 (1-0.02)^{4-0} = 1 - 0.92 = 0.08$ ή 8%

Προσέγγιση της κατανομής Διωνυμικής κατανομής από την Κανονική κατανομή

Για μεγάλα ν η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται ικανοποιητικά από μια κανονική κατανομή με την ίδια μέση τιμή και την ίδια διακύμανση. Δηλαδή, αν $X \sim B(\nu, p)$ τότε για μεγάλες τιμές του ν, (στην πράξη όταν $\nu p \geq 5$ και $\nu(1-p) \geq 5$), η κατανομή της *X* προσεγγίζεται από την N(μ, σ) με $\boldsymbol{\mu = \nu p}$ και $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\nu p(1-p)}}$.

Κατανομή *Poisson* $\boldsymbol{P(\lambda)}$

Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε τον αριθμό των *συμβάντων* στη μονάδα μέτρησης. Τα συμβάντα μπορεί να είναι ο αριθμός των γεννήσεων ή των θανάτων σε μια κτηνοτροφική μονάδα μέσα σε ένα μήνα, ο αριθμός των σωματιδίων που εκπέμπονται από μια ραδιενεργό ουσία μέσα σε ένα χρονικό διάστημα, ο αριθμός των βακτηριδίων σε 1cm^2 ενός τρυβλίου Petri, ο αριθμός των αυτοκινήτων ή πελατών που φθάνουν σε ένα σταθμό διοδίων ή super market σε μια χρονική περίοδο κ.ά. Ο αριθμός των *συμβάντων X* είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με δυνατές τιμές 0, 1, 2, … που ακολουθεί την κατανομή του *Poisson* (από τον Γάλλο μαθηματικό S. D. Poisson (1781-1840)) με παράμετρο λ, $\boldsymbol{X \sim P(\lambda)}$ και συνάρτηση πιθανότητας:

$$\boldsymbol{P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots}$$

Η κατανομή *Poisson* δημιουργήθηκε ως οριακή κατανομή της *διωνυμικής* κατανομής για μεγάλο ν (θεωρητικά ν$\longrightarrow +\infty$), έτσι ώστε η μέση τιμή της να συγκλίνει σε μια θετική σταθερά $\lambda = \nu p$.

Η μέση τιμή, η διασπορά και η τυπική απόκλιση της κατανομής *Poisson* δίνονται από τις σχέσεις:

$\boldsymbol{E(x) = \mu = \lambda}$, $\quad \boldsymbol{Var(X) = \sigma^2 = \lambda}$ $\quad$ και $\quad \boldsymbol{\sigma = \sqrt{\lambda}}$

Προσέγγιση της κατανομής Poisson από την Κανονική κατανομή

Με εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος αποδεικνύεται ότι και η κατανομή *Poisson* μπορεί να προσεγγισθεί ικανοποιητικά από μια κανονική κατανομή με την ίδια μέση τιμή και την ίδια διακύμανση. Δηλαδή αν $X \sim P(\lambda)$, για μεγάλες τιμές της παραμέτρου λ (στην πράξη για λ>10), η κατανομή της *X* προσεγγίζεται από την N(μ, σ) με $\boldsymbol{\mu = \lambda}$ και $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\lambda}}$.

Λύσεις ασκήσεων από το **φυλλάδιο 5 – Ασκήσεις σε Τυχαίες Μεταβλητές και Κατανομές**

5. Σε έναν πληθυσμό (ας πούμε γυναίκες ηλικίας 30 - 40 ετών στην Ελλάδα), η μέση συστολική πίεση είναι 120 mmHg, με τυπική απόκλιση 20 mmHg και ο πληθυσμός (των πιέσεων) ακολουθεί κανονική κατανομή. **(α)** Τι ποσοστό του πληθυσμού έχει πίεση: **(i)** Μικρότερη από 150 mmHg, **(ii)** Μεγαλύτερη από 135 mmHg, **(iii)** Μεταξύ 110 και 125 mmHg, **(β)** Ποια είναι εκείνη η πίεση πάνω από την οποία βρίσκεται μόνο το 1% του πληθυσμού; **(γ)** Η συστολική πίεση ενός ατόμου κρίνεται ως φυσιολογική εάν βρίσκεται στο διάστημα εκείνο γύρω από τον μέσο όρο (συμμετρικό διάστημα γύρω από τον μέσο) που περιέχει το 95% των πιέσεων του πληθυσμού. Να βρεθεί εκείνη η τιμή πίεσης, πάνω από την οποία ένα άτομο κρίνεται ως υπερτασικό. Να βρεθεί επίσης εκείνη η τιμή της πίεσης, κάτω από την οποία ένα άτομο κρίνεται ως υποτασικό.

(α) (i)

$$P(X < 150) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{150-120}{20}\right) = P(Z < 1.5) = \Phi(1.5) = 0.9332 \ \text{ ή } \ 93.32\%$$

(ii)

$$P(X > 135) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{135-120}{20}\right) = P(Z > 0.75) = 1 - P(Z \le 0.75) = 1 - \Phi(0.75)$$
$$= 1 - 0.7734 = 0.2266 \quad \text{ή} \quad 22.66\%$$

(iii)

$$P(110 \le X \le 125) = P\left(\frac{110-120}{20} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{125-120}{20}\right) = P(-0.5 \le Z \le 0.25)$$
$$= \Phi(0.25) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.25) - [1 - \Phi(0.5)] = \Phi(0.25) - 1 + \Phi(0.5)$$
$$= 0.5987 - 1 + 0.6915 = 0.2902 \quad \text{ή} \ \ 29.02\%$$

(β) Έστω x_0 η ζητούμενη πίεση. Τότε:

$$P(X > x_0) = 0.01 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{x_0-120}{20}\right) = 0.01 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{x_0-120}{20}\right) = 0.01$$

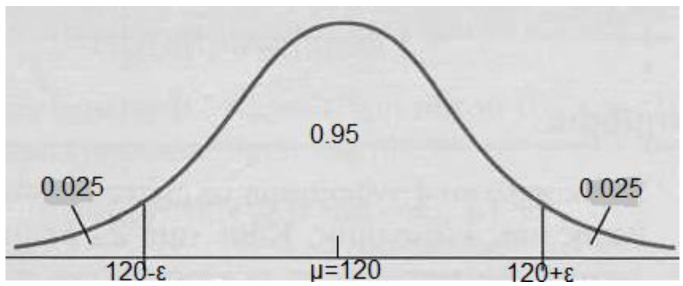
$$\Leftrightarrow 1 - P\left(Z \le \frac{x_0-120}{20}\right) = 0.01 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{x_0-120}{20}\right) = 0.01 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x_0-120}{20}\right)$$
$$= 0.99 \qquad (2)$$

Αλλά από τον πίνακα της Τυπικής Κανονικής Κατανομής βρίσκουμε: $\Phi(2.33) = 0.99$ (3)

Από τις σχέσεις (2) & (3) έχουμε:

$$\frac{x_0 - 120}{20} = 2.33 \Longrightarrow x_0 = 166.6\text{mmHg}$$

γ) Αναζητούμε δύο συστολικές πιέσεις συμμετρικές ως προς την μέση τιμή *μ=120*, έστω τις *120-ε* και *120+ε*, τέτοιες ώστε ανάμεσα σε αυτές να βρίσκεται το 95% των πιέσεων του πληθυσμού.



$$P(120 - \varepsilon \leq X \leq 120 + \varepsilon) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\frac{120 - \varepsilon - 120}{20} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{120 + \varepsilon - 120}{20}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-\varepsilon}{20} < Z < \frac{\varepsilon}{20}\right) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{20}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{20}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{20}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{20}\right)\right] = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{20}\right) = 1.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{20}\right) = 0.975$$

Αλλά από τον πίνακα της Τυπικής Κανονικής Κατανομής βρίσκουμε: $\Phi(1.96) = 0.975$ Άρα

$$\frac{\varepsilon}{20} = 1.96 \Leftrightarrow \varepsilon = 39.2$$

Επομένως ένα άτομο κρίνεται ως **υποτασικό**, όταν έχει πίεση μικρότερη ή ίση από
$120 - \varepsilon = 120 - 39.2 = 80.8m$mHg.
Ενώ ένα άτομο κρίνεται ως **υπερτασικό**, όταν έχει πίεση μεγαλύτερη ή ίση από

$$120 + \varepsilon = 120 + 39.2 = 159.2m\text{mHg}.$$

6. Μία γέφυρα χωράει το πολύ 100 αυτοκίνητα και το μέγιστο βάρος που σηκώνει είναι 365 τόνοι. Αν υποθέσουμε ότι τα βάρη των αυτοκινήτων ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο βάρος 3.5 τόνους και τυπική απόκλιση 0.5 τόνο, **(α)** ποια η πιθανότητα, εάν κάποια στιγμή βρεθούν στη γέφυρα 100 αυτοκίνητα, να έχουμε υπέρβαση του ανώτατου επιτρεπτού βάρους; **(β)** Ποιο είναι εκείνο το βάρος που θα έπρεπε να σηκώνει η γέφυρα, αν απαιτούσαμε η πιθανότητα να έχουμε υπέρβαση αυτού του βάρους από 100 αυτοκίνητα να είναι 0.1%;

Έστω $X_1,\ X_2, \dots, X_{100}$ τα βάρη των 100 αυτοκινήτων, τα οποία αποτελούν ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κανονική κατανομή με $X_i \sim N(\mu,\ \sigma),\ i = 1, 2, \dots, 100$, με $\mu = 3.5\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \sigma = 0.5$. Τότε για το συνολικό βάρος S_{100} των 100 αυτοκινήτων θα ισχύει:

$$S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim N\big(\nu\mu, \sigma\sqrt{\nu}\big) \quad \text{ή} \ \sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(350, 5)$$

(α) Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} > 365) = P\left(\frac{S_{100} - \nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}} > \frac{365 - 350}{5}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(Z \leq 3)$$

$$= 1 - \Phi(3) = 1 - 0.9987 = 0.0013 \ \ \text{ή} \ \ 0.13\%$$

(β) Έστω x_0 το ζητούμενο βάρος. Τότε:

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} > x_0) = 0.001 \Leftrightarrow P\left(\frac{S_{100} - \nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}} > \frac{x_0 - 350}{5}\right) = 0.001$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{x_0 - 350}{5}\right) = 0.001 \Leftrightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{x_0 - 350}{5}\right) = 0.001$$

$$\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{x_0 - 350}{5}\right) = 0.001 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x_0 - 350}{5}\right) = 0.999 \qquad (1)$$

Αλλά από τον πίνακα της Τυπικής Κανονικής Κατανομής βρίσκουμε: $\Phi(3.09) = 0.999$ (2)
Από τις σχέσεις (1)& (2) έχουμε:

$$\frac{x_0 - 350}{5} = 3.09 \Rightarrow x_0 = 365.45 \ \ \tau \acute{o} \nu o\iota$$

7. Ένα ηλεκτρονικό σύστημα αποτελείται από δέκα εξαρτήματα. Κάθε ένα από τα εξαρτήματα έχει πιθανότητα 0.2 να υποστεί βλάβη και το να πάθει βλάβη κάποιο εξάρτημα είναι ανεξάρτητο από το αν άλλα εξαρτήματα έχουν υποστεί βλάβη ή όχι. **(α)** Αν το σύστημα λειτουργεί, εφόσον τουλάχιστον οκτώ από τα δέκα εξαρτήματά του λειτουργούν, ποια η πιθανότητα το σύστημα να λειτουργεί; **(β)** Ποια η πιθανότητα να υποστούν βλάβη τουλάχιστον δύο εξαρτήματα, δεδομένου ότι έχει υποστεί βλάβη τουλάχιστον ένα.

(α) Θεωρούμε ως επιτυχία το ενδεχόμενο {ένα εξάρτημα να λειτουργεί} με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.8$. Τότε η πιθανότητα αποτυχίας είναι $1 - p = 0.2$.
Έστω *X* η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (εξαρτημάτων σε λειτουργία) στα $\nu = 10$ εξαρτήματα του ηλεκτρονικού συστήματος. Τότε η τ.μ. *X* θα ακολουθεί *διωνυμική κατανομή* $B(\nu = 10, p = 0.8)$.

και $\boldsymbol{P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x}}$, $\quad \boldsymbol{x = 0, 1, 2, \dots, \nu}$

$$P(\text{το σύστημα να λειτουργεί}) = P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$

$$= \binom{10}{8} 0.8^8 (1 - 0.8)^{10-8} + \binom{10}{9} 0.8^9 (1 - 0.8)^{10-9} + \binom{10}{10} 0.8^{10} (1 - 0.8)^{10-10} =$$

$$= 45 \cdot 0.8^8 \cdot 0.2^2 + 10 \cdot 0.8^9 \cdot 0.2^1 + 1 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.2^0 = 0.676$$

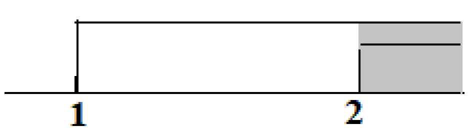
(β) Θεωρούμε ως επιτυχία το ενδεχόμενο {ένα εξάρτημα να έχει βλάβη} με πιθανότητα επιτυχίας $p' = 0.2$. Έστω *Y* η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (εξαρτημάτων σε βλάβη) στα $\nu = 10$ εξαρτήματα του ηλεκτρονικού συστήματος. Τότε η τ.μ. *Y* θα ακολουθεί *διωνυμική κατανομή* $B(\nu = 10, p' = 0.2)$.

$$P(Y \geq 2 / Y \geq 1) = \frac{P(Y \geq 2 \cap Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} = \frac{P(Y \geq 2)}{P(Y \geq 1)} = \frac{1 - P(Y < 2)}{1 - P(Y < 1)} = \frac{1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)}{1 - P(Y = 0)} =$$

$$= \frac{1 - \binom{10}{0} 0.2^0 (1 - 0.2)^{10-0} - \binom{10}{1} 0.2^1 (1 - 0.2)^{10-1}}{1 - \binom{10}{0} 0.2^0 (1 - 0.2)^{10-0}} =$$

$$= \frac{1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.8^{10} - 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8^9}{1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.8^{10}} = \frac{0.6242}{0.8926} = 0.699$$

Καθώς ο τύπος της δεσμευμένης πιθανότητας είναι: $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$



$\{ Y \geq 2 \cap Y \geq 1\} = \{Y \geq 2\}$

8. Ένα καινούριο εμβόλιο έχει πιθανότητα 80% ανοσοποίησης των κουνελιών από μία ασθένεια. Ένας μεγάλος αριθμός κουνελιών εμβολιάζεται και στη συνέχεια ορισμένα κουνέλια επιλέγονται τυχαία για εργαστηριακή παρακολούθηση. **(α)** Ποια η πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον 9 ανοσοποιημένα κουνέλια, όταν επιλέξουμε 10 κουνέλια. **(β)** Εάν επιλέξουμε 100 κουνέλια, ποια η πιθανότητα ο αριθμός των ανοσοποιημένων κουνελιών να κυμαίνεται μεταξύ του 72 και του 88.

(α) Θεωρούμε ως επιτυχία το ενδεχόμενο {ένα εμβολιασμένο κουνέλι να είναι ανοσοποιημένο} με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.8$. Τότε η πιθανότητα αποτυχίας είναι $1 - p = 0.2$.
Έστω X η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (ανοσοποιημένων κουνελιών), όταν επιλέγουμε τυχαία $\nu = 10$ κουνέλια. Τότε η τ.μ. X θα ακολουθεί *διωνυμική* κατανομή $B(\nu = 10, p = 0.8)$ με $P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x}, \;\; x = 0, 1, 2, \dots, \nu$

$$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} 0.8^9 (1 - 0.8)^{10-9} + \binom{10}{10} 0.8^{10} (1 - 0.8)^{10-10} = 0.3758$$

όπου

$$\binom{10}{9} = \frac{10!}{9!\,(10-9)!} = 10 \qquad \text{και} \qquad \binom{10}{10} = \frac{10!}{10!\,(10-10)!} = 1$$

(β) Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (ανοσοποιημένων κουνελιών), όταν επιλέγουμε τυχαία $\nu = 100$ κουνέλια. Τότε η τ.μ. Y θα ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(\nu = 100,\; p = 0.8)$. Για μεγάλες τιμές του ν όμως (πρακτικά όταν $\nu p \geq 5$ και $\nu(1-p) \geq 5$) η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται ικανοποιητικά από κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = E(Y) = \nu p$ και διασπορά $\sigma^2 = \nu p(1-p)$.

$$\mu = E(Y) = \nu p = 100 \cdot 0.8 = 80, \qquad \sigma^2 = \nu p(1-p) = 100 \cdot 0.8 \cdot (1 - 0.8) = 16$$

Επομένως $\sigma = \sqrt{16} = 4$

$$P(72 \leq Y \leq 88) = P\left(\frac{72 - 80}{4} \leq \frac{Y - \nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}} \leq \frac{88 - 80}{4}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(2) - [1 - \Phi(2)] = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

9. Μια μηχανή συσκευασίας τόνου σε κονσέρβες έχει ρυθμισθεί έτσι ώστε το βάρος του περιεχομένου ανά κονσέρβα, έστω X, να ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 250gr και τυπική απόκλιση 10gr.

α) Επιλέγουμε τυχαία μια κονσέρβα από την παραγωγή της συγκεκριμένης μηχανής. Ποια είναι η πιθανότητα το βάρος του περιεχομένου της κονσέρβας ***i)*** να βρίσκεται μεταξύ 245gr και 255gr ***ii)*** να είναι μεγαλύτερο από 265gr.

β) Επιλέγουμε τυχαία 9 κονσέρβες από την παραγωγή της συγκεκριμένης μηχανής. Ποια είναι η πιθανότητα ***i)*** το πολύ 2 από τις 9 κονσέρβες να περιέχουν ποσότητα μεγαλύτερη από 265gr ***ii)*** το <u>μέσο</u> βάρος του περιεχομένου των 9 κονσερβών να είναι μεγαλύτερο από 265gr ***iii)*** το <u>συνολικό</u> βάρος του περιεχομένου των 9 κονσερβών να είναι μεγαλύτερο από 2265gr.

γ) Να προσδιορίσετε την τιμή x_0 της X για την οποία ισχύει ότι: το 90% των κονσερβών που παράγονται από τη συγκεκριμένη μηχανή έχουν βάρος (περιεχομένου) μικρότερο από αυτήν την τιμή (x_0).

α) ***i)***

$$P(245 < X < 255) = P\left(\frac{245-250}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{255-250}{10}\right) = P(-0.5 < Z < 0.5) =$$

$$= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) - [1-\Phi(0.5)] = \Phi(0.5) - 1 + \Phi(0.5)$$

$$= 2\Phi(0.5) - 1 = 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.383 \quad \text{ή} \quad 38.3\%$$

ii)

$$P(X > 265) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{265-250}{10}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 =$$

$$= 0.0668$$

β) ***i)*** Θεωρούμε ως επιτυχία το ενδεχόμενο {μια κονσέρβα που επιλέγεται τυχαία να περιέχει ποσότητα μεγαλύτερη από 265gr} με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.0668$. Τότε η πιθανότητα αποτυχίας είναι $1 - p = 0.9332$.

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (κονσέρβες που περιέχουν ποσότητα μεγαλύτερη από 265gr), όταν επιλέγονται τυχαία $\nu = 9$ κονσέρβες. Τότε η τ.μ. X θα ακολουθεί *διωνυμική* κατανομή $B(\nu = 9,\ p = 0.0668)$ με συνάρτηση πιθανότητας:

$P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x}$, $x = 0, 1, 2, \dots, \nu$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \binom{9}{0} 0.0668^0 (1-0.0668)^{9-0} +$$

$$\binom{9}{1} 0.0668^1 (1-0.0668)^{9-1} + \binom{9}{2} 0.0668^2 (1-0.0668)^{9-2} = 0.9816$$

καθώς

$$\binom{9}{0} = \frac{9!}{0!\,(9-0)!} = 1, \qquad \binom{9}{1} = \frac{9!}{1!\,(9-1)!} = 9, \qquad \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = 36$$

ii) Έστω $X_1,\ X_2, \dots, X_9$ τα βάρη των 9 κονσερβών, τα οποία αποτελούν ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κανονική κατανομή με $X_i \sim N(\mu,\ \sigma),\ i = 1, 2, \dots, 9$ με $\mu = 250g\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \sigma = 10g.$ Τότε για το μέσο βάρος $\bar{X}$ των 9 κονσερβών θα ισχύει:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{9} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) \quad \text{ή} \quad \bar{X} \sim N\left(250, \frac{10}{\sqrt{9}}\right) \quad \text{ή} \quad \bar{X} \sim N(250, 3.33)$$

Επομένως:

$$P(\bar{X} > 265) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}} > \frac{265 - 250}{3.33}\right) = P(Z > 4.5) = 1 - P(Z \leq 4.5) = 1 - \Phi(4.5)$$
$$\simeq 1 - 1 \simeq 0$$

iii) Για το συνολικό βάρος των 9 κονσερβών θα ισχύει:

$$S_9 = X_1 + X_2 + \cdots + X_9 = \sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(\nu\mu, \sigma\sqrt{\nu}) \ \text{ ή } \ S_9 \sim N(9 \cdot 250, 10\sqrt{9}) \ \text{ ή } \ S_9 \sim N(2250, 30)$$

Επομένως:

$$P(S_9 > 2265) = P\left(\frac{S_9 - \nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}} > \frac{2265 - 2250}{30}\right) = P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) =$$

$$= 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085 \quad \text{ή} \quad 30.85\%$$

γ) Έστω x_0 το ζητούμενο βάρος. Τότε:

$$P(X < x_0) = 0.90 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_0 - 250}{10}\right) = 0.90 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{x_0 - 250}{10}\right) = 0.90$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x_0 - 250}{10}\right) = 0.90 \qquad (1)$$

Αλλά από τον πίνακα της Τυπικής Κανονικής Κατανομής βρίσκουμε: $\Phi(1.28) \simeq 0.90$ (2)

Από τις σχέσεις (1)& (2) έχουμε:

$$\frac{x_0 - 250}{10} = 1.28 \Longrightarrow x_0 = 262.8gr$$

10. Ο αριθμός των επισκεπτών σε μια ιστοσελίδα στο διαδίκτυο είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή 5 άτομα ανά ώρα. Βρείτε την πιθανότητα να επισκεφθούν την ιστοσελίδα: **(α)** ακριβώς δύο άτομα στη διάρκεια μιας ώρας, **(β)** τουλάχιστον δύο άτομα κατά τη διάρκεια δύο ωρών, **(γ)** από τουλάχιστον ένα άτομο κάθε ώρα σε δύο ώρες, **(δ)** μεταξύ 100 και 150 άτομα στη διάρκεια ενός 24ώρου. Επίσης βρείτε την πιθανότητα **(ε)** τουλάχιστον δύο επισκέψεων στη διάρκεια μιας ώρας, δεδομένου ότι είχαμε τουλάχιστον μία επίσκεψη.

(α) Έστω X η τ.μ. που μετρά τον αριθμό των επισκεπτών στην ιστοσελίδα. Η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 5$, τον μέσο αριθμό επισκεπτών ανά ώρα στην ιστοσελίδα.

$$P(X = 2) = \frac{e^{-5} \cdot 5^2}{2!} = \frac{0.0067 \cdot 25}{1 \cdot 2} = 0.084$$

(β) Στη διάρκεια δύο ωρών αναμένουμε κατά μέσον όρο $2 \cdot 5 = 10$ επισκέπτες στην ιστοσελίδα. Άρα λ΄=10.

$$P(X' \geq 2) = 1 - P(X' < 2) = 1 - [P(X' = 0) + P(X' = 1)] = 1 - P(X' = 0) - P(X' = 1)$$

$$= 1 - \frac{e^{-10} \cdot 10^0}{0!} - \frac{e^{-10} \cdot 10^1}{1!} = 1 - e^{-10}(1 + 10) = 1 - 11e^{-10} =$$

$$= 1 - 11 \cdot 0.00005 = 0.99945$$

(γ) Θα πρέπει να έχουμε τουλάχιστον έναν επισκέπτη την 1η ώρα και τουλάχιστον έναν επισκέπτη την 2η ώρα. Δηλαδή: $P(X \geq 1) \cdot P(X \geq 1)$

Καθώς λ=5 έχουμε:

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + \cdots \quad = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{e^{-5} \cdot 5^0}{0!} = 1 - e^{-5}$$

$$= 1 - 0.0067 = 0.9933$$

Επομένως $\quad P(X \geq 1) \cdot P(X \geq 1) = 0.9933 \cdot 0.9933 = 0.9866$

(δ) Εντός 24 ωρών αναμένουμε κατά μέσον όρο $5 \cdot 24 = 120$ επισκέπτες στην ιστοσελίδα. Άρα λ΄΄=120. Όταν η παράμετρος λ της Poisson είναι μεγαλύτερη του 10, η Poisson συγκλίνει στην Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = \lambda$ και διασπορά $\sigma^2 = \lambda$, άρα τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Επομένως εάν X΄΄ ο αριθμός των επισκεπτών εντός 24 ωρών τότε $X'' \sim P(\lambda'')$. Όμως επειδή $\lambda'' = 120 > 10$ η Poisson συγκλίνει στην Κανονική $X'' \sim N(\mu = \lambda'' = 120, \sigma = \sqrt{\lambda''} = \sqrt{120})$.

Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(100 \leq X'' \leq 150) = P\left(\frac{100-120}{\sqrt{120}} \leq \frac{X'' - \lambda''}{\sqrt{\lambda''}} \leq \frac{150-120}{\sqrt{120}}\right) = P(-1.83 \leq Z \leq 2.74) =$$

$$= \Phi(2.74) - \Phi(-1.83) = \Phi(2.74) - [1 - \Phi(1.83)] =$$

$$= \Phi(2.74) - 1 + \Phi(1.83) = 0.9969 - 1 + 0.9664 = 0.9633$$

(ε) Έχουμε 5 επισκέπτες την ώρα στην ιστοσελίδα. Άρα $\lambda = 5$.

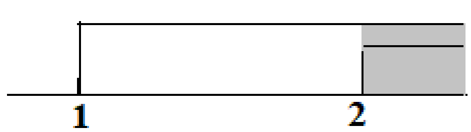
$$P(X \geq 2 / X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - P(X < 2)}{1 - P(X < 1)} =$$

$$= \frac{1 - P(X=0) - P(X=1)}{1 - P(X=0)} = \frac{1 - \frac{e^{-5}5^0}{0!} - \frac{e^{-5}5^1}{1!}}{1 - \frac{e^{-5}5^0}{0!}} = \frac{1 - e^{-5}(1+5)}{1 - e^{-5}}$$

$$= \frac{1 - 6 \cdot 0.0067}{1 - 0.0067} = 0.9663$$

Καθώς:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



$\{Y \geq 2 \cap Y \geq 1\} = \{Y \geq 2\}$

11. Ένας εντομολόγος μελετά τον αριθμό των ζωυφίων στα φύλλα ενός συγκεκριμένου τύπου δένδρου. Ο αριθμός αυτός ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 4 ζωύφια ανά φύλλο. **α)** Ποια η πιθανότητα να πάρει τυχαία ένα φύλλο με τουλάχιστον 2 ζωύφια; **β)** Ποια η πιθανότητα να πάρει τυχαία 2 φύλλα που να έχουν συνολικά το πολύ δύο ζωύφια; **γ)** Ο εντομολόγος επιλέγει 3 φύλλα. Ποια η πιθανότητα τα 2 μόνο από αυτά να έχουν από τουλάχιστον 2 ζωύφια το καθένα. **δ)** Ποια η πιθανότητα στα 36 φύλλα να υπάρχουν συνολικά τουλάχιστον 150 ζωύφια; **ε)** Ποια η πιθανότητα στα 36 φύλλα να υπάρχουν συνολικά το πολύ 168 ζωύφια, όταν είναι γνωστό ότι υπάρχουν τουλάχιστον 150 ζωύφια.

α) Έστω X η τ.μ. που μετρά τον αριθμό των ζωυφίων σε ένα φύλλο του δένδρου. Η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 4$, τον μέσο αριθμό ζωυφίων ανά φύλλο.

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots \quad = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - \frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} - \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} = 1 - e^{-4}(1 + 4) = 1 - 5e^{-4} = 1 - 5 \cdot 0.0183$$

$$= 0.9085$$

β) Στα 2 φύλλα αναμένουμε κατά μέσον όρο $2 \cdot 4 = 8$ ζωύφια. Εάν X' η τ.μ. που μετρά τον αριθμό των ζωυφίων σε δύο φύλλα του δένδρου. Τότε $X' \sim P(\lambda')\ \mu\varepsilon\ \lambda' = 8$.

$$(X' \leq 2) = P(X' = 0) + P(X' = 1) + P(X' = 2) = \frac{e^{-8}8^0}{0!} + \frac{e^{-8}8^1}{1!} + \frac{e^{-8}8^2}{2!}$$

$$= e^{-8}(1 + 8 + 32) = 41e^{-8} = 41 \cdot 0.0003 = 0.0123$$

γ) Θεωρούμε ως επιτυχία το ενδεχόμενο {ένα φύλλο που επιλέγεται τυχαία να έχει τουλάχιστον 2 ζωύφια} με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.9085$ (από το α) ερώτημα).
Έστω X η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (φύλλα που έχουν τουλάχιστον 2 ζωύφια), όταν επιλέγονται τυχαία $\nu = 3$ φύλλα. Τότε η τ.μ. X θα ακολουθεί *διωνυμική* κατανομή $B(\nu = 3,\ p = 0.9085)$ και $P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1 - p)^{\nu - x}$, $x = 0, 1, 2, \dots, \nu$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} 0.9085^2 (1 - 0.9085)^{3-2} = 3 \cdot 0.9085^2 \cdot 0.0915 = 0.2266 \quad \text{ή} \quad 22.66\%$$

καθώς

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

δ) Στα 36 φύλλα αναμένουμε κατά μέσον όρο $36 \cdot 4 = 144$ ζωύφια. Έστω X'' η τ.μ. που μετρά τον αριθμό των ζωυφίων σε 36 φύλλα του δένδρου. Τότε $X'' \sim P(\lambda'')$ $\mu\varepsilon$ $\lambda'' = 144$. Όμως επειδή λ''=144 >10, η *Poisson* συγκλίνει στην *Κανονική*, δηλ. $X'' \sim N(\mu = \lambda'' = 144,\ \ \sigma = \sqrt{\lambda''} = \sqrt{144})$. Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X'' \geq 150) = P\left(\frac{X'' - \lambda''}{\sqrt{\lambda''}} \geq \frac{150 - 144}{\sqrt{144}}\right) = P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = 1 - \Phi(0.5) =$$

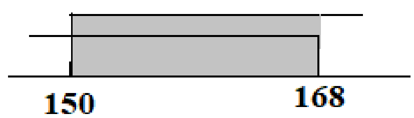
$$= 1 - 0.6915 = 0.3085$$

ε) Η ζητούμενη δεσμευμένη πιθανότητα είναι:

$$P(X'' \leq 168\ /\ X'' \geq 150) = \frac{P(X'' \leq 168 \cap X'' \geq 150)}{P(X'' \geq 150)} = \frac{P(150 \leq X'' \leq 168)}{P(X'' \geq 150)}$$

Όμως:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



Επομένως:

$$P(150 \leq X'' \leq 168) = P\left(\frac{150 - 144}{\sqrt{144}} \leq \frac{X'' - \lambda''}{\sqrt{\lambda''}} \leq \frac{168 - 144}{\sqrt{144}}\right) = P(0.5 \leq Z \leq 2) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(0.5) = 0.9772 - 0.6915 = 0.2857$$

Άρα:

$$P(X'' \leq 168\ /\ X'' \geq 150) = \frac{P(150 \leq X'' \leq 168)}{P(X'' \geq 150)} = \frac{0.2857}{0.3085} = 0.9261$$

12. Ο αριθμός των σωματιδίων που εκπέμπει μια πηγή ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή ένα σωματίδιο ανά δευτερόλεπτο. Ζητούνται οι πιθανότητες: **α)** Σε διάστημα 3 δευτερολέπτων να έχουμε το πολύ 2 σωματίδια, **β)** σε διάστημα 4 δευτερολέπτων να έχουμε τουλάχιστον 3 σωματίδια. **γ)** σε διάστημα 15 λεπτών να έχουμε τουλάχιστον 930 σωματίδια. **δ)** Επιλέγουμε τυχαία 4 διαστήματα των 3 δευτερολέπτων. Ποια η πιθανότητα σε ακριβώς 3 από τα 4 διαστήματα να έχουμε το πολύ 2 σωματίδια.

α) Σε διάστημα 3 δευτερολέπτων η πηγή εκπέμπει κατά μέσον όρο $3 \cdot 1 = 3$ σωματίδια. Έστω X η τ.μ. που μετρά τον αριθμό των σωματιδίων που εκπέμπονται από την πηγή σε 3 δευτερόλεπτα. Τότε η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 3,$ δηλαδή $X \sim P(\lambda = 3)$.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P\ (X = 2) = \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!}$$

$$= e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right) = 8.5e^{-3} = 8.5 \cdot 0.05 = 0.425$$

β) Σε διάστημα 4 δευτερολέπτων η πηγή εκπέμπει κατά μέσον όρο $4 \cdot 1 = 4$ σωματίδια. Έστω X' η τ.μ. που μετρά τον αριθμό των σωματιδίων που εκπέμπονται από την πηγή σε 4 δευτερόλεπτα. Τότε η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda' = 4,$ δηλαδή $X \sim P(\lambda' = 4)$.

$$P(X' \geq 3) = P(X' = 3) + P(X' = 4) + \cdots \quad = 1 - P(X' < 3) =$$

$$= 1 - [P(X' = 0) + P(X' = 1) + P(X' = 2)] =$$

$$= 1 - P(X' = 0) - P(X' = 1) - P(X' = 2) = 1 - \frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} - \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} - \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!}$$

$$= 1 - e^{-4}(1 + 4 + 8) = 1 - 13e^{-4} = 1 - 13 \cdot 0.018 = 0.766$$

γ) Σε διάστημα 15 λεπτών η πηγή εκπέμπει κατά μέσον όρο $15 \cdot 60 \cdot 1 = 900$ σωματίδια. Έστω X'' η τ.μ. που μετρά τον αριθμό των σωματιδίων που εκπέμπονται από την πηγή. Τότε $X'' \sim P(\lambda'')$ *με* $\lambda'' = 900$. Όμως επειδή $\lambda''=900 >10$, η *Poisson* συγκλίνει στην *Κανονική*, δηλ. $X'' \sim N(\mu = \lambda'' = 900,\ \sigma = \sqrt{\lambda''} = \sqrt{900})$.

Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X'' \geq 930) = P\left(\frac{X'' - \lambda''}{\sqrt{\lambda''}} \geq \frac{930 - 900}{\sqrt{900}}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - \Phi(1) =$$

$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

δ) Θεωρούμε ως επιτυχία το ενδεχόμενο {σε διάστημα 3 δευτερολέπτων η πηγή να εκπέμπει το πολύ 2 σωματίδια} με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.425$ (από το α) ερώτημα).

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (διαστήματα των 3 δευτερολέπτων, στα οποία εκπέμπονται το πολύ 2 σωματίδια), όταν επιλέγονται τυχαία $\nu = 4$ διαστήματα των 3 δευτερολέπτων. Τότε η τ.μ. X θα ακολουθεί *διωνυμική* κατανομή

$B(\nu = 4,\ p = 0.425)$ με $P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x}, x = 0, 1, \dots, \nu$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} 0.425^3 (1 - 0.425)^{4-3} = 4 \cdot 0.425^3 \cdot 0.575 = 0.1766 \quad \text{ή} \quad 17.66\%$$

καθώς

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

13. Οι ακαθάριστες εβδομαδιαίες εισπράξεις μιας κτηνοτροφικής μονάδας, από την πώληση του γάλακτος που παράγει, είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 2200 και τυπική απόκλιση 230 ευρώ. Ποια είναι η πιθανότητα οι ακαθάριστες εισπράξεις της μονάδας από το γάλα που παράγει **α)** σε μια εβδομάδα να ξεπερνούν τα 2000 ευρώ, **β)** να ξεπερνούν τα 2000 ευρώ σε 2 από τις 3 επόμενες εβδομάδες και **γ)** σε ένα μήνα (4 εβδομάδες) να ξεπερνούν **συνολικά** τα 10000 ευρώ (μπορείτε να υποθέσετε ότι οι εβδομαδιαίες εισπράξεις είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες).

α) Οι ακαθάριστες εβδομαδιαίες εισπράξεις της μονάδας έστω $X \sim N(\mu = 2200, \sigma = 230)$

$$P(X > 2000) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{2000 - 2200}{230}\right) = P(Z > -0.87) = 1 - P(Z \leq -0.87)$$

$$= 1 - \Phi(-0.87) = 1 - [1 - \Phi(0.87)] = \Phi(0.87) = 0.8078 \quad \text{ή} \quad 80.78\%$$

β) Θεωρούμε ως επιτυχία το ενδεχόμενο {οι εβδομαδιαίες εισπράξεις της κτηνοτροφικής μονάδας να ξεπερνούν τα 2000 ευρώ} με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.8078$ (από το α) ερώτημα).

Έστω X' η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (εβδομαδιαίες εισπράξεις μεγαλύτερες από 2000 ευρώ), όταν επιλέγονται τυχαία $\nu = 3$ εβδομάδες. Τότε η τ.μ. X' θα ακολουθεί *διωνυμική* κατανομή $B(\nu = 3,\ p = 0.8078)$ με συνάρτηση πιθανότητας:

$P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x}, x = 0, 1, 2, \dots, \nu$

$P(X' = 2) = \binom{3}{2} 0.8078^2 (1 - 0.8078)^{3-2} = 0.3763$

καθώς

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

γ) Έστω $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$ οι ακαθάριστες εβδομαδιαίες εισπράξεις της κτηνοτροφικής μονάδας, οι οποίες αποτελούν ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κανονική κατανομή με $X_i \sim N(\mu,\ \sigma)$, $i = 1, 2, 3, 4$ με $\mu = 2200\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \sigma = 230.$

Τότε για τις εισπράξεις ενός μήνα (4 εβδομάδων) θα ισχύει:

$$S_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = \sum_{i=1}^{4} X_i \sim N\left(\nu\mu, \sigma\sqrt{\nu}\right) \text{ ή}$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_i \sim N\left(4 \cdot 2200, 230\sqrt{4}\right) \text{ ή } \ S_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \sim N(8800, 460)$$

Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 > 10000) = P\left(\frac{S_4 - \nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}} > \frac{10000 - 8800}{460}\right) = P(Z > 2.61)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.61) = 1 - \Phi(2.61) = 1 - 0.9955 = 0.0045 \ \text{ ή } \ 0.45\%$$

14. Μια μηχανή κατασκευάζει λαμπτήρες που συσκευάζονται σε κουτιά των 100. Ο αριθμός των ελαττωματικών λαμπτήρων σε ένα τυχαίο κουτί είναι τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο λ=1.1 και ένα κουτί απορρίπτεται ως ελαττωματικό αν περιέχει τουλάχιστον τρεις ελαττωματικούς λαμπτήρες. **(α)** Να βρεθεί η πιθανότητα ένα τυχαίο κουτί να απορριφθεί ως ελαττωματικό. **(β)** Επιλέγουμε τυχαία 5 κουτιά από την παραγωγή της συγκεκριμένης μηχανής. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από αυτά να απορριφθεί ως ελαττωματικό. **(γ)** Επιλέγουμε τυχαία 100 κουτιά από την παραγωγή της συγκεκριμένης μηχανής. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον 13, αλλά όχι περισσότερα από 19 να απορριφθούν ως ελαττωματικά.

(α) Έστω X η τ.μ. που μετρά τον αριθμό των ελαττωματικών λαμπτήρων σε ένα τυχαίο κουτί των 100. Τότε η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 1.1$. Ένα κουτί απορρίπτεται ως ελαττωματικό αν περιέχει τουλάχιστον τρεις ελαττωματικούς λαμπτήρες.

$$\mathrm{P}(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + \cdots \quad = 1 - P(X < 3) =$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$$

$$= 1 - \frac{e^{-1.1} \cdot 1.1^0}{0!} - \frac{e^{-1.1} \cdot 1.1^1}{1!} - \frac{e^{-1.1} \cdot 1.1^2}{2!} = 1 - e^{-1.1}(1 + 1.1 + 0.605)$$

$$= 1 - 2.705 \cdot 0.333 = 1 - 0.9 = 0.1$$

(β) Θεωρούμε ως επιτυχία το ενδεχόμενο { ένα τυχαίο κουτί να απορριφθεί ως ελαττωματικό} με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.1$ (από το α) ερώτημα).

Έστω X' η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (ελαττωματικά κουτιά), όταν επιλέγονται τυχαία $\nu = 5$ κουτιά. Τότε η τ.μ. X' θα ακολουθεί *διωνυμική* κατανομή

$B(\nu = 5,\ p = 0.1)$ με συνάρτηση πιθανότητας $P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x}, x = 0, 1, 2, \ldots, \nu$

$$P(X' \geq 1) = 1 - P(X' = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.1^0 (1 - 0.1)^{5-0} = 1 - 0.59 = 0.41$$

καθώς

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!\,(5-0)!} = 1$$

(γ) Θεωρούμε ως επιτυχία το ενδεχόμενο { ένα τυχαίο κουτί να απορριφθεί ως ελαττωματικό} με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.1$ (από το α) ερώτημα).

Έστω X'' η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των επιτυχιών (ελαττωματικά κουτιά), όταν επιλέγονται τυχαία $\nu = 100$ κουτιά. Τότε η τ.μ. X'' θα ακολουθεί *διωνυμική* κατανομή

$B(\nu = 100,\ p = 0.1)$. Για μεγάλες τιμές του ν όμως (πρακτικά όταν $\nu p \geq 5$ και $\nu(1-p) \geq 5$) η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται ικανοποιητικά από κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = E(X) = \nu p$ και διασπορά $\sigma^2 = \nu p(1-p)$.

$$\mu = E(X'') = \nu p = 100 \cdot 0.1 = 10, \qquad \sigma^2 = \nu p(1-p) = 100 \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.1) = 9$$

Επομένως $\sigma = \sqrt{9} = 3$

$$P(13 \leq X'' \leq 19) = P\left(\frac{13-10}{3} \leq \frac{X''-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}} \leq \frac{19-10}{3}\right) = P(1 \leq Z \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(1)$$

$$= 0.9987 - 0.8413 = 0.1574$$

15. Η ποσότητα νικοτίνης που περιέχεται σε ένα τσιγάρο συγκεκριμένης μάρκας είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ = 0.8*mg* και τυπική απόκλιση σ = 0.1*mg*. Αν ένα άτομο καπνίζει 100 τσιγάρα την εβδομάδα ποια η πιθανότητα: **α)** Η **συνολική** ποσότητα νικοτίνης στην οποία θα εκτεθεί να είναι τουλάχιστον 82*mg*. **β)** Η **μέση** ποσότητα νικοτίνης (των 100 τσιγάρων) να είναι μεταξύ των 0.78 και 0.83*mg*.

Έστω $X_1,\ X_2, \ldots, X_{100}$ η ποσότητα νικοτίνης στην οποία εκτίθεται ένα άτομο για κάθε ένα από τα 100 τσιγάρα που καπνίζει σε μια εβδομάδα. Οι ποσότητες αυτές αποτελούν ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την ίδια κατανομή με μέση τιμή $\mu = 0.8\ mg$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.1\ mg$.

Τότε σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ. Ο. Θ) θα ισχύει:

$$S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(\nu\mu, \sigma\sqrt{\nu}) \text{ ή } S_{100} \sim N(100 \cdot 0.8, \quad 0.1\sqrt{100}) \text{ ή }$$

$$S_{100} \sim N(80, 1)$$

και

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) \quad \text{ή} \quad \bar{X} \sim N\left(0.8, \frac{0.1}{\sqrt{100}}\right) \quad \text{ή} \quad \bar{X} \sim N(0.8, 0.01)$$

Επομένως:

α)

$$P(S_{100} \geq 82) = P\left(\frac{S_{100} - \nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}} \geq \frac{82-80}{1}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - \Phi(2) =$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228 \quad \text{ή} \quad 2.28\%$$

β)

$$P(0.78 \leq \bar{X} \leq 0.83) = P\left(\frac{0.78-0.8}{0.01} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}} \leq \frac{0.83-0.8}{0.01}\right) = P(-2 \leq Z \leq 3)$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) - [1-\Phi(2)] = \Phi(3) - 1 + \Phi(2) =$$

$$= 0.9987 - 1 + 0.9772 = 0.9759.$$

16. Η ποσότητα φυτικών ινών που περιέχεται ανά μερίδα (των 100*gr)* τραγανών δημητριακών είναι τυχαία μεταβλητή, έστω *X*, η οποία σύμφωνα με την εταιρεία παραγωγής έχει μέση τιμή 5*gr* και τυπική απόκλιση 0.81*gr*. Σε ένα διαιτολόγιο δύο εβδομάδων σκέφτεστε να εντάξετε 40 μερίδες από τα συγκεκριμένα δημητριακά. Ποια είναι η πιθανότητα **α)** η **μέση** ποσότητα φυτικών ινών σε 40 τέτοιες μερίδες να είναι τουλάχιστον 4.5*gr*, **β)** η **συνολική** ποσότητα φυτικών ινών σε 40 τέτοιες μερίδες να είναι τουλάχιστον 215*gr*.

Έστω $X_1,\ X_2, \dots, X_{40}$ η ποσότητα φυτικών ινών ανά μερίδα του διαιτολογίου. Οι ποσότητες αυτές αποτελούν ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την ίδια κατανομή με μέση τιμή $\mu=5gr$ και τυπική απόκλιση $\sigma=0.81gr$.

Τότε σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ. Ο. Θ.) ισχύει:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{40}}{40} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) \quad \text{ή} \quad \bar{X} \sim N\left(\mu = 5, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = \frac{0.81}{\sqrt{40}} = 0.128\right)$$

και

$$S_{40} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{40} = \sum_{i=1}^{40} X_i \sim N\left(\nu\mu, \sigma\sqrt{\nu}\right)$$

$$\text{ή} \qquad S_{40} \sim N\left(\nu\mu = 40 \cdot 5 = 200,\ \sigma\sqrt{\nu} = 0.81\sqrt{40} = 5.12\right)$$

α)

$$P(\bar{X} \geq 4.5) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}} \geq \frac{4.5-5}{0.128}\right) = P(Z \geq -3.9) = 1 - P(Z < -3.9) =$$

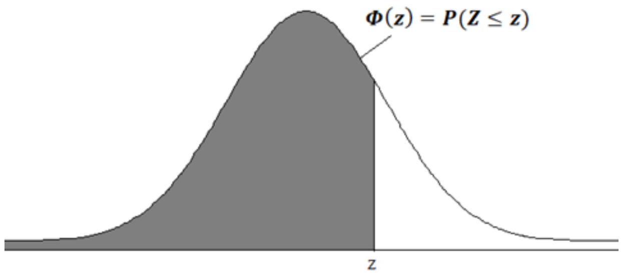
$$= 1 - \Phi(-3.9) = 1 - [1 - \Phi(3.9)] = \Phi(3.9) \simeq 1$$

β)

$$P(S_{40} \geq 215) = P\left(\frac{S_{40} - \nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}} \geq \frac{215 - 200}{5.12}\right) = P(Z \geq 2.93) = 1 - P(Z < 2.93) =$$

$$= 1 - \Phi(2.93) = 1 - 0.9983 = 0.0017$$

Πίνακας Τυπικής Κανονικής κατανομής



Παράδειγμα: Φ(0.82)=0.7939, Φ(1.28)=0.8997

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998