

Προβλήματα Πιθανοτήτων

1. Από εξετάσεις που έγιναν σε 5000 ζώα μιας κτηνοτροφικής μονάδας, διαπιστώθηκε ότι 1000 είχαν προσβληθεί από μία ασθένεια A, 800 είχαν προσβληθεί από μια ασθένεια B, ενώ 200 από αυτά είχαν προσβληθεί και από την ασθένεια A και από την ασθένεια B. Θεωρώντας ότι οι 5000 επαναλήψεις είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων, να υπολογιστεί η πιθανότητα, σε ένα ζώο της κτηνοτροφικής μονάδας που επιλέγεται τυχαία να διαπιστωθεί ότι έχει προσβληθεί: i) από την ασθένεια A, ii) από την ασθένεια B, iii) και από τις δύο ασθένειες, iv) από την ασθένεια A, όχι όμως από την ασθένεια B, v) από την ασθένεια B, όχι όμως από την ασθένεια A, vi) ακριβώς από μία από τις δύο ασθένειες.
2. Εξετάστηκαν 800 ζώα για να διαπιστωθεί εάν είναι υγιή ή άρρωστα. Επίσης για κάθε ζώο καταγράφηκε το φύλο του. Τα αποτελέσματα των εξετάσεων φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

	Υγιή	Άρρωστα
Αρσενικά	150	350
Θηλυκά	80	220

Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα, τα οποία αναφέρονται στο πείραμα της επιλογής τυχαία ενός ζώου από τον πληθυσμό που μελετάμε:

A: το ζώο που επιλέχθηκε είναι υγιές

B: το ζώο που επιλέχθηκε είναι αρσενικό

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα και θεωρώντας ότι οι 800 επαναλήψεις είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων, να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων: A, B, AB, A', B', A'B', A'B, AB', A'B ∪ AB', AB ∪ A'B'.

3. Η πιθανότητα σε ένα έτος να συμβεί σεισμός έντασης πάνω από 6 βαθμούς της κλίμακας ρίχτερ σε μια συγκεκριμένη περιοχή είναι 0.005. Η αντίστοιχη πιθανότητα να πληγεί η περιοχή από έντονες βροχοπτώσεις είναι 0.02, ενώ υπάρχει πιθανότητα 0.001 σε διάρκεια ενός έτους να εμφανιστούν και τα δύο φαινόμενα. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες, σε ένα έτος η περιοχή να πληγεί: α) μόνο από σεισμό, β) μόνο από βροχοπτώσεις, γ) τουλάχιστον από ένα από τα δύο φαινόμενα και δ) από κανένα από τα δύο φαινόμενα.
4. Το 15% από τα δένδρα ενός δάσους πάσχουν από κάποια ασθένεια A, το 8% από κάποια ασθένεια B και το 20% από κάποια ασθένεια Γ. Επίσης, ποσοστό 3% πάσχει και από την A και από την B, ποσοστό 2% και από την A και από τη Γ και ποσοστό 4% και από την B και από την Γ. Τέλος, το ποσοστό των δένδρων που πάσχει και από τις τρεις ασθένειες είναι 1%. Αν επιλεγεί ένα δένδρο από αυτό το δάσος στην τύχη, ποια η πιθανότητα: i) να πάσχει μόνο από την B ή μόνο από την Γ, ii) να μην πάσχει από καμία από τις τρεις ασθένειες και iii) να πάσχει από την A, δεδομένου ότι πάσχει από (τουλάχιστον) μία από τις τρεις ασθένειες.
5. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 10 φορές. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρνουμε κάθε φορά διαφορετική ένδειξη από την προηγούμενη.
6. Το πρόβλημα του Chevalier de Méré. Ποιο είναι πιο πιθανό, να φέρουμε ένα τουλάχιστον «έξι» ρίχνοντας ένα ζάρι 4 φορές ή να φέρουμε μία τουλάχιστον φορά «εξάρες» ρίχνοντας δύο ζάρια 24 φορές.
7. Μια επιτροπή αποτελείται από 2 Γεωπόνους και 3 Μηχανικούς που επιλέγονται από 5 Γεωπόνους και 7 Μηχανικούς. Αν όλες οι συνθέσεις της επιτροπής που μπορεί να προκύψουν είναι εξίσου πιθανές, ποια η πιθανότητα: α) ένας συγκεκριμένος Μηχανικός να συμμετέχει οπωσδήποτε στην επιτροπή, β) δύο συγκεκριμένοι Γεωπόνοι να μην συμμετέχουν στην επιτροπή.
8. Σε μια χώρα η πιθανότητα να ζήσει ένας άνδρας τουλάχιστον 70 χρόνια είναι 0.85, ενώ η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον 75 χρόνια είναι 0.80. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν 70χρονο άνδρα από τη χώρα αυτή, ποια είναι η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον άλλα 5 χρόνια.

9. Από επτά όμοια κλειδιά ένα μόνο ανοίγει μια κλειδαριά. Δοκιμάζουμε χωρίς επανάθεση ένα-ένα τα κλειδιά μέχρι να ανοίξει η κλειδαριά. Ποια η πιθανότητα να συμβεί αυτό στην τρίτη δοκιμή; Γενικότερα στην κ δοκιμή; (όπου $\kappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$).
10. Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν 10 κουνέλια από τα οποία τα 3 είναι θηλυκά. Για τον έλεγχο του πληθυσμού των κουνελιών κρίθηκε σκόπιμο να απομακρυνθούν δύο από τα θηλυκά. Έτσι στήθηκε μια παγίδα όπου πιάνονταν τα κουνέλια το ένα μετά το άλλο, έως ότου πιαστούν δύο θηλυκά. Ποια η πιθανότητα να συμβεί αυτό, όταν πιαστεί το τέταρτο στη σειρά κουνέλι.
11. Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Ζητούνται οι πιθανότητες των ενδεχομένων:
 $E_1 = \{ \text{Το 1}^\circ \text{ παιδί είναι κορίτσι} \}$
 $E_2 = \{ \text{Στα δύο πρώτα παιδιά τουλάχιστον ένα είναι κορίτσι} \}$
 $E_3 = \{ \text{Τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου} \}$
 Επίσης να βρεθούν οι δεσμευμένες πιθανότητες: $P(E_1 / E_2)$, $P(E_3 / E_1)$, $P(E_2 / E_1)$ και να εξεταστεί εάν τα E_1, E_2, E_3 είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.
12. Σε κάποιο εργαστήριο υπάρχουν 3 φάρμακα Φ_1, Φ_2, Φ_3 που έχουν όμοια εμφάνιση. Υπάρχουν 2 φιάλες με το φάρμακο Φ_1 , 3 φιάλες με το φάρμακο Φ_2 , 1 φιάλη με το Φ_3 και κάποιος ξεκόλλησε τις αντίστοιχες ετικέτες από τις φιάλες. Αν κάνουμε ένεση σε ινδικά χοιρίδια, τότε αναπτύσσεται μια αντιτοξίνη σε ποσοστό 25% αν χρησιμοποιηθεί το φάρμακο Φ_1 , 12% αν χρησιμοποιηθεί το Φ_2 και 30% αν χρησιμοποιηθεί το Φ_3 . Παίρνουμε τυχαία μια φιάλη και κάνουμε ένεση σε ένα ινδικό χοιρίδιο. i) Ποια η πιθανότητα να αναπτυχθεί αντιτοξίνη στο χοιρίδιο, ii) Αν διαπιστωθεί ότι στο ινδικό χοιρίδιο αναπτύχθηκε αντιτοξίνη, ποια η πιθανότητα να πήραμε το φάρμακο Φ_1 , iii) Αν δεν αναπτύχθηκε αντιτοξίνη, ποια η πιθανότητα να κάναμε ένεση με το φάρμακο Φ_2 .
13. Το 2% ενός πληθυσμού πάσχει από AIDS. Η εξέταση που εφαρμόζεται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει σωστή διάγνωση στο 90% των περιπτώσεων, όταν το εξεταζόμενο άτομο πάσχει από AIDS και στο 95% των περιπτώσεων, όταν δεν πάσχει από AIDS. Επιλέγεται ένα άτομο τυχαία και υποβάλλεται στην εξέταση. α) Ποια η πιθανότητα η εξέταση να βγει θετική, δηλαδή να δείξει ότι πάσχει από AIDS. β) Ποια η πιθανότητα λανθασμένης διάγνωσης. γ) Ποια η πιθανότητα να πάσχει πράγματι από AIDS ένα άτομο, για το οποίο η εξέταση ήταν θετική. δ) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι υγιές ένα άτομο για το οποίο η εξέταση ήταν θετική.
14. Έστω ένα ζευγάρι, του οποίου η γυναίκα έχει ομάδα αίματος O και ο άνδρας έχει ομάδα αίματος AB . Είναι γνωστό ότι: i) όταν οι ομάδες αίματος O και AB διασταυρώνονται, το 50% των απογόνων έχουν ομάδα αίματος A και το 50% ομάδα αίματος B , ii) δίδυμα που προέρχονται από το ίδιο ωάριο έχουν την ίδια ομάδα αίματος, ενώ δίδυμα από διαφορετικά ωάρια μπορεί να έχουν ίδια ή διαφορετική ομάδα αίματος, iii) το ένα τέταρτο των διδύμων προέρχεται από το ίδιο ωάριο. Δεδομένου ότι το ζευγάρι αποκτά δίδυμα αγόρια με ομάδα αίματος B , ποια η πιθανότητα τα δίδυμα να προέρχονται από το ίδιο ωάριο;
15. Σε μια εξέταση δίνονται τέσσερις απαντήσεις σε κάθε ερώτηση και σωστή είναι μόνο μία από τις τέσσερις. Η πιθανότητα να γνωρίζει ο εξεταζόμενος την απάντηση μιας ερώτησης είναι 70%. Στις περιπτώσεις που ο εξεταζόμενος δεν γνωρίζει την απάντηση σε μια ερώτηση, απαντάει εντελώς τυχαία διαλέγοντας μια από τις τέσσερις που δίδονται. Αν ο εξεταζόμενος απαντήσει σωστά σε μια ερώτηση, ποια είναι η πιθανότητα να γνώριζε την απάντηση;
16. Το 45% του πληθυσμού μιας χώρας είναι καπνιστές. Από μια ασθένεια των πνευμόνων πάσχει το 80% των καπνιστών και το 30% των μη καπνιστών.
 α) Ποιο ποσοστό του πληθυσμού πάσχει από την ασθένεια των πνευμόνων.
 β) Αν ένα άτομο από τον πληθυσμό πάσχει από αυτήν την ασθένεια, ποια η πιθανότητα να είναι καπνιστής. Ερμηνεύστε την πιθανότητα αυτή ως ποσοστό.
 γ) Τα ενδεχόμενα «ένα άτομο να είναι καπνιστής» και «ένα άτομο να πάσχει από τη συγκεκριμένη ασθένεια» είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα ή εξαρτημένα ενδεχόμενα;

17. Σε μια κτηνοτροφική μονάδα της Λέσβου υπάρχουν 160 αγελάδες. Από αυτές οι 40 είναι της φυλής A, οι 48 της φυλής B και οι 72 της φυλής Γ. Αν από τις αγελάδες της φυλής A έχει προσβληθεί από αφθώδη πυρετό ποσοστό 15%, από τις αγελάδες της φυλής B ποσοστό 20% και από τις αγελάδες της φυλής Γ ποσοστό 10%, ποια η πιθανότητα μια αγελάδα που θα επιλέξουμε τυχαία: **α)** να έχει προσβληθεί από αφθώδη πυρετό, **β)** να είναι της φυλής A, όταν είναι γνωστό ότι βρέθηκε να έχει προσβληθεί από αφθώδη πυρετό, **γ)** να είναι της φυλής Γ, όταν βρέθηκε να μην έχει προσβληθεί από αφθώδη πυρετό, Να ερμηνεύσετε τις πιθανότητες που υπολογίσατε στα α), β) και γ) με όρους ποσοστών. **δ)** Τα ενδεχόμενα «η αγελάδα έχει προσβληθεί από αφθώδη πυρετό» και «η αγελάδα είναι της φυλής A» είναι μεταξύ τους εξαρτημένα ή ανεξάρτητα ενδεχόμενα;