ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Σύντομη ανασκόπηση εννοιών, τύπων και λύση προβλημάτων

Πείραμα τύχης είναι οτιδήποτε μπορεί να επαναληφθεί με τις ίδιες συνθήκες όσες φορές θέλουμε και το αποτέλεσμά του δεν μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα. Μπορούμε όμως να καταγράψουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματά του.

Δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Ένας δειγματικός χώρος μπορεί να είναι πεπερασμένος, απείρως αριθμήσιμος ή συνεχής.
Για παράδειγμα ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος περιλαμβάνει $6^2 = 36$ σημεία (όσες και οι επαναληπτικές διατάξεις).

$$\Omega = \begin{cases} (1,1) \ (1,2) \ (1,3) \ (1,4) \ (1,5) \ \ (1,6) \\ (2,1) \ (2,2) \ (2,3) \ (2,4) \ (2,5) \ \ (2,6) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (6,1) \ (6,2) \ (6,3) \ (6,4) \ (6,5) \ \ (6,6) \end{cases}$$

Κάθε δυνατό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης, δηλαδή κάθε σημείο του δειγματικού χώρου, λέγεται **απλό ενδεχόμενο,** ενώ ένα σύνολο απλών ενδεχομένων λέγεται (σύνθετο) **ενδεχόμενο**.

Βέβαιο ενδεχόμενο είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντοτε **(Ω).**

Αδύνατο ενδεχόμενο είναι το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται ποτέ **(∅).**

Η τομή δύο ενδεχομένων πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται και το *Α* και το *Β* **(**$\boldsymbol{A \cap B}$ ή $\boldsymbol{AB}$**).**

Η ένωση δύο ενδεχομένων πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το *Α* ή το *Β* (ή και τα δύο) ή αλλιώς λέμε όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα *Α* και *Β* ($\boldsymbol{A \cup B}$**).**

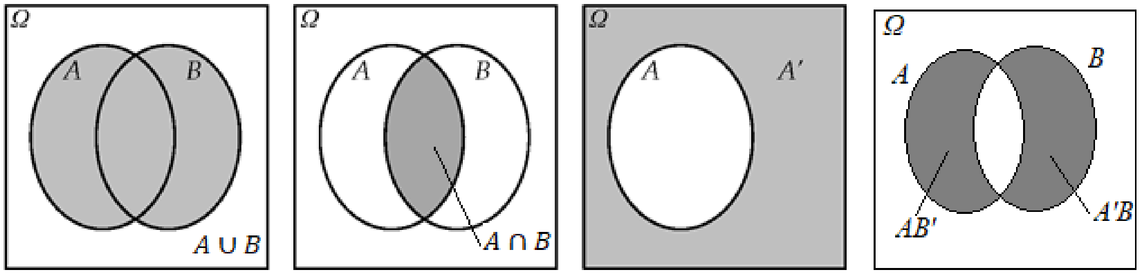
Συμπλήρωμα $\boldsymbol{A'}$ ενός ενδεχομένου *Α,* είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το *Α.*

Ξένα ενδεχόμενα είναι τα ενδεχόμενα, τα οποία δεν έχουν κοινά σημεία, δηλαδή η τομή τους είναι το κενό σύνολο **(**$\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$).

Η διαφορά δύο ενδεχομένων πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το *Α* και όχι το *Β* ($\boldsymbol{A - B}$ ή $\boldsymbol{AB'}$).

Η συμμετρική διαφορά δύο ενδεχομένων πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ακριβώς ένα από αυτά ($\boldsymbol{AB' \cup A'B}$).

Παράσταση ενδεχομένων με διαγράμματα



Κλασικός ορισμός της πιθανότητας (Laplace, 1812)

Αν ο δειγματικός χώρος Ω είναι **πεπερασμένος** και όλα τα απλά ενδεχόμενά του έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής (**ισοπίθανα**), τότε η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \tau\omega\nu\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu\ \tau o\upsilon\ A}{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \tau\omega\nu\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu\ \tau o\upsilon\ \Omega} = \frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \varepsilon\upsilon\nu o\iota\kappa\acute{\omega}\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu}{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omega}\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu}$$

Στατιστικός ορισμός της πιθανότητας (Richard von Mises, 1919)

Αν στις N επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης ένα ενδεχόμενο A εμφανίσθηκε N_A φορές, τότε το πηλίκο N_A/N ονομάζεται σχετική συχνότητα του ενδεχομένου A. Όσο το N μεγαλώνει τόσο η σχετική συχνότητα σταθεροποιείται γύρω από έναν αριθμό που ονομάζεται **πιθανότητα του ενδεχομένου** $\boldsymbol{A}$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{P(A)}$.

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov, 1930)

Σε κάθε ενδεχόμενο A ενός πειράματος τύχης αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό $\boldsymbol{P(A)}$ τέτοιον ώστε:

i) $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A του δειγματικού χώρου Ω

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$

εάν τα ενδεχόμενα $A_1,\ A_2, \ldots.$ είναι ξένα ανά δύο ενδεχόμενα.

Ιδιότητες της πιθανότητας

Από τα τρία αξιώματα προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες των πιθανοτήτων:

$P(\emptyset) = 0, \qquad P(\Omega) = 1, \qquad 0 \leq P(A) \leq 1$ για κάθε ενδεχόμενο A

$P(A') = 1 - P(A), \qquad P(AB') = P(A) - P(AB)$

$A\nu\ A \subseteq B\ \ \tau \acute{o} \tau \varepsilon\ \ P(A) \leq P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)$

Δεσμευμένη πιθανότητα

Ορίζουμε ως δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου A δοθέντος του B την πιθανότητα:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad \acute{o}\tau\alpha\nu\ \ P(B) > 0 \qquad (\delta\eta\lambda.\ \ P(B) \neq 0)$$

Πολλαπλασιαστικός τύπος

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει:

$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$ όταν $P(A) > 0, \quad P(B) > 0$

Γενικεύοντας:

$P(A_1 A_2 \dots A_\nu) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \dots P(A_\nu / A_1 A_2 \dots A_{\nu-1})$

Όταν $P(A_1 A_2 \dots A_{\nu-1}) > 0$

Ανεξαρτησία ενδεχομένων

Δύο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται ανεξάρτητα αν και μόνο αν:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Τρία ενδεχόμενα A, B, Γ ονομάζονται ανεξάρτητα αν ισχύουν και οι 4 παρακάτω σχέσεις:

i) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

ii) $P(A\Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma)$

iii) $P(B\Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma)$

iv) $P(AB\Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$

Δηλαδή εάν είναι ανά δύο ανεξάρτητα i), ii), iii) και ανά τρία ανεξάρτητα iv).

Γενικεύοντας τα ν ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ ονομάζονται ανεξάρτητα αν και μόνο αν:

i) Είναι ανά δύο ανεξάρτητα (οπότε θα πρέπει να εξεταστούν $\binom{\nu}{2}$ σχέσεις)

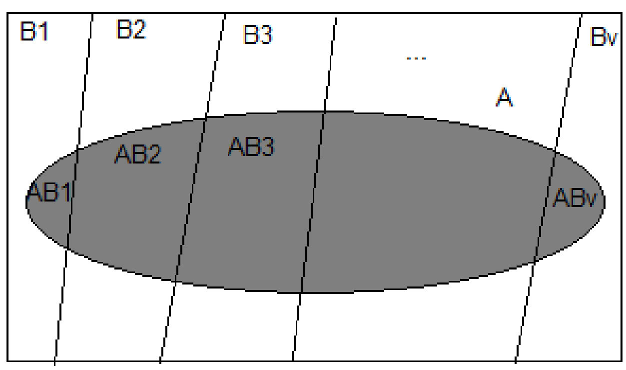
ii) Είναι ανά τρία ανεξάρτητα (οπότε θα πρέπει να εξεταστούν $\binom{\nu}{3}$ σχέσεις)

…………………………………………………………………………

Είναι ανά ν ανεξάρτητα, δηλαδή $P(A_1 A_2 \dots A_\nu) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \dots P(A_\nu)$

Θεώρημα της ολικής πιθανότητας

Έστω $B_1, B_2, \dots, B_\nu$ ν ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα τα οποία καλύπτουν όλο το δειγματικό χώρο Ω ενός πειράματος τύχης (δηλ. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_\nu = \Omega$) και $P(B_i) > 0$, για $i = 1, 2, \dots, \nu$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A του Ω έχουμε:



$$\boldsymbol{P(A)} = P(AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_\nu) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_\nu) =$$

$$= \boldsymbol{P(A/B_1)\, P(B_1) + P(A/B_2)\, P(B_2) + \cdots + P(A/B_\nu)\, P(B_\nu)}$$

Θεώρημα Bayes

Έστω $B_1,\ B_2, \dots , B_\nu$ ν ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα τα οποία καλύπτουν όλο το δειγματικό χώρο Ω ενός πειράματος τύχης (δηλ. $B_1 \cup B_2 \cup\ \dots \cup B_\nu = \Omega$) και $P(B_i) > 0$ για $i = 1, 2, \dots , \nu$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A του Ω με $P(A) > 0$, έχουμε:

$$\boldsymbol{P(B_i/A)} = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{\boldsymbol{P(A/B_i) \cdot P(B_i)}}{\boldsymbol{P(A)}} \quad , \qquad i = 1, 2, \dots , \nu$$

ή

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) \cdot P(B_i)}{P(A/B_1)\ P(B_1) + P(A/B_2)\ P(B_2) + \cdots + P(A/B_\nu)\ P(B_\nu)}$$

Λύσεις ασκήσεων από το **φυλλάδιο 4 - Προβλήματα πιθανοτήτων**

1. Από εξετάσεις που έγιναν σε 5000 ζώα μιας κτηνοτροφικής μονάδας, διαπιστώθηκε ότι 1000 είχαν προσβληθεί από μία ασθένεια Α, 800 είχαν προσβληθεί από μια ασθένεια Β, ενώ 200 από αυτά είχαν προσβληθεί και από την ασθένεια Α και από την ασθένεια Β. Θεωρώντας ότι οι 5000 επαναλήψεις είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων, να υπολογιστεί η πιθανότητα, σε ένα ζώο της κτηνοτροφικής μονάδας που επιλέγεται τυχαία να διαπιστωθεί ότι έχει προσβληθεί: i) από την ασθένεια Α, ii) από την ασθένεια Β, iii) και από τις δύο ασθένειες, iv) από την ασθένεια Α, όχι όμως από την ασθένεια Β, v) από την ασθένεια Β, όχι όμως από την ασθένεια Α, vi) ακριβώς από μία από τις δύο ασθένειες.

Σύμφωνα με τον στατιστικό ορισμό της πιθανότητας και θεωρώντας ότι οι 5000 επαναλήψεις είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων έχουμε:

i) $P(A) = \frac{1000}{5000} = 0.2$ ii) $P(B) = \frac{800}{5000} = 0.16$ iii) $P(AB) = \frac{200}{5000} = 0.04$

iv) $P(AB') = \frac{1000-200}{5000} = 0.16$ v) $P(BA') = \frac{800-200}{5000} = 0.12$

vi) $P(AB' \cup BA') = P(AB') + P(BA') = 0.16 + 0.12 = 0.28$

2. Εξετάστηκαν 800 ζώα για να διαπιστωθεί εάν είναι υγιή ή άρρωστα. Επίσης για κάθε ζώο καταγράφηκε το φύλο του. Τα αποτελέσματα των εξετάσεων φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

	Υγιή	Άρρωστα
Αρσενικά	150	350
Θηλυκά	80	220

Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα, τα οποία αναφέρονται στο πείραμα της επιλογής τυχαία ενός ζώου από τον πληθυσμό που μελετάμε:

A: το ζώο που επιλέχθηκε είναι υγιές

B: το ζώο που επιλέχθηκε είναι αρσενικό

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα και θεωρώντας ότι οι 800 επαναλήψεις είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων, να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων: A, B, AB, A', B', $A'B'$, $A'B$, AB', $A'B \cup AB'$, $AB \cup A'B'$.

Σύμφωνα με τον στατιστικό ορισμό της πιθανότητας και θεωρώντας ότι οι 800 επαναλήψεις είναι αρκετές ώστε να έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων έχουμε:

$$P(A) = \frac{150+80}{800} = 0.2875, \quad P(B) = \frac{150+350}{800} = 0.625, \quad P(AB) = \frac{150}{800} = 0.1875,$$

$$P(A') = \frac{350+220}{800} = 0.7125 \text{ ή } P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.2875 = 0.7125,$$

$$P(B') = \frac{80+220}{800} = 0.375$$

$$P(A'B') = \frac{220}{800} = 0.275, \quad P(A'B) = \frac{350}{800} = 0.4375, \quad P(AB') = \frac{80}{800} = 0.1$$

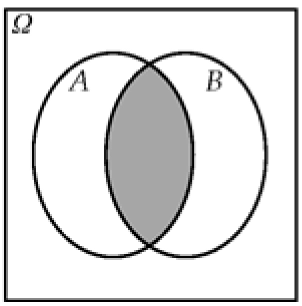
$$P(A'B \cup AB') = \frac{350+80}{800} = 0.5375 \text{ ή}$$

$$P(A'B \cup AB') = P(A'B) + P(AB') = 0.4375 + 0.1 = 0.5375$$

$P(AB \cup A'B') = \frac{150+220}{800} = 0.4625$ ή

$P(AB \cup A'B') = P(AB) + P(A'B') = 0.1875 + 0.275 = 0.4625$

3. Η πιθανότητα σε ένα έτος να συμβεί σεισμός έντασης πάνω από 6 βαθμούς της κλίμακας ρίχτερ σε μια συγκεκριμένη περιοχή είναι 0.005. Η αντίστοιχη πιθανότητα να πληγεί η περιοχή από έντονες βροχοπτώσεις είναι 0.02, ενώ υπάρχει πιθανότητα 0.001 σε διάρκεια ενός έτους να εμφανιστούν και τα δύο φαινόμενα. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες, σε ένα έτος η περιοχή να πληγεί: **α)** μόνο από σεισμό, **β)** μόνο από βροχοπτώσεις, **γ)** τουλάχιστον από ένα από τα δύο φαινόμενα και **δ)** από κανένα από τα δύο φαινόμενα.



Έστω A={το ενδεχόμενο να συμβεί σεισμός έντασης μεγαλύτερης από 6 βαθμούς σε ένα έτος}

και B={το ενδεχόμενο να συμβεί έντονη βροχόπτωση σε ένα έτος}

Τότε $P(A) = 0.005$, $P(B) = 0.02$, $P(AB) = 0.001$

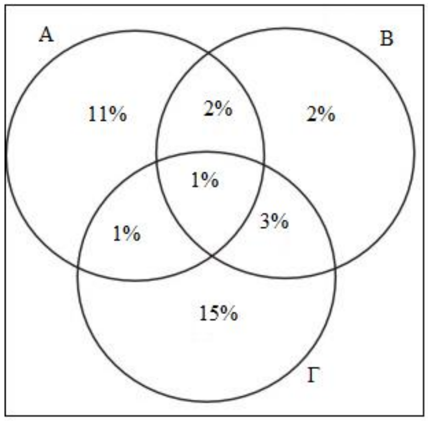
α) $P(AB') = P(A) - P(AB) = 0.005 - 0.001 = 0.004$

β) $P(BA') = P(B) - P(AB) = 0.02 - 0.001 = 0.019$

γ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.005 + 0.02 - 0.001 = 0.024$

δ) $P(A'B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.024 = 0.976$

4. Το 15% από τα δένδρα ενός δάσους πάσχουν από κάποια ασθένεια Α, το 8% από κάποια ασθένεια Β και το 20% από κάποια ασθένεια Γ. Επίσης, ποσοστό 3% πάσχει και από την Α και από την Β, ποσοστό 2% και από την Α και από τη Γ και ποσοστό 4% και από την Β και από την Γ. Τέλος, το ποσοστό των δένδρων που πάσχει και από τις τρεις ασθένειες είναι 1% . Αν επιλεγεί ένα δένδρο από αυτό το δάσος στην τύχη, ποια η πιθανότητα: **i)** να πάσχει μόνο από την Β ή μόνο από την Γ ασθένεια, **ii)** να πάσχει από τουλάχιστον μία ασθένεια, **iii)** να μην πάσχει από καμία από τις τρεις ασθένειες και **iv)** να πάσχει από την Α, δεδομένου ότι πάσχει από (τουλάχιστον) μία από τις τρεις ασθένειες.



i) $P(BA'\Gamma' \cup \Gamma A'B') = P(BA'\Gamma') + P(\Gamma A'B') = 0.02 + 0.15 = 0.17$ ή 17%

ii) $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma) =$
$0.15 + 0.08 + 0.20 - 0.03 - 0.02 - 0.04 + 0.01 = 0.35$

iii) $P(A'B'\Gamma') = P(A \cup B \cup \Gamma)' = 1 - P(A \cup B \cup \Gamma) = 1 - 0.35 = 0.65$

iv) $P(A \,/\, (A \cup B \cup \Gamma)) = \frac{P(A\cap(A\cup B\cup \Gamma))}{P(A\cup B\cup \Gamma)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B\cup \Gamma)} = \frac{0.15}{0.35} = 0.4286$

5. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 10 φορές. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρνουμε κάθε φορά διαφορετική ένδειξη από την προηγούμενη.

Έστω Α={το ενδεχόμενο να φέρνουμε κάθε φορά διαφορετική ένδειξη από την προηγούμενη}

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{2^{10}} = \frac{2}{1024} = 0.00195$$

όπου $N(A) = \{ΚΓΚΓΚΓΚΓΚΓ, ΓΚΓΚΓΚΓΚΓΚ\}$ το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων και $N(\Omega) = 2^{10}$ το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων (όλα τα σημεία του δειγματικού χώρου), τα οποία είναι όσα και οι επαναληπτικές διατάξεις των 2 στοιχείων (Κ, Γ) ανά 10.

6. Το πρόβλημα του Chevalier de Méré. Ποιο είναι πιο πιθανό, να φέρουμε ένα τουλάχιστον «έξι» ρίχνοντας ένα ζάρι 4 φορές ή να φέρουμε μία τουλάχιστον φορά «εξάρες» ρίχνοντας δύο ζάρια 24 φορές.

Έστω A={το ενδεχόμενο να φέρουμε τουλάχιστον ένα «έξι» ρίχνοντας ένα ζάρι 4 φορές} και Β={ το ενδεχόμενο να φέρουμε μία τουλάχιστον φορά «εξάρες» ρίχνοντας δύο ζάρια 24 φορές}

Τότε A' ={το ενδεχόμενο να φέρουμε κανένα «έξι» ρίχνοντας ένα ζάρι 4 φορές} και

Β΄={ το ενδεχόμενο να φέρουμε καμιά φορά «εξάρες» ρίχνοντας δύο ζάρια 24 φορές}

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - 0.48225 = 0.51775$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 1 - 0.5086 = 0.4914$$

7. Μια επιτροπή αποτελείται από 2 Γεωπόνους και 3 Μηχανικούς που επιλέγονται από 5 Γεωπόνους και 7 Μηχανικούς. Αν όλες οι συνθέσεις της επιτροπής που μπορεί να προκύψουν είναι εξίσου πιθανές, ποια η πιθανότητα: α) ένας συγκεκριμένος Μηχανικός να συμμετέχει οπωσδήποτε στην επιτροπή, β) δύο συγκεκριμένοι Γεωπόνοι να μην συμμετέχουν στην επιτροπή.

Το πλήθος των επιτροπών που αποτελούνται από 2 Γεωπόνους (Γ) και 3 Μηχανικούς (Μ) που επιλέγονται από 5Γ και 7Μ είναι όσοι και οι συνδυασμοί (δεν να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, αλλά μόνο ποια άτομα έχουν επιλεγεί):

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = 350$$

α) Το πλήθος των επιτροπών που ένας συγκεκριμένος Μηχανικός συμμετέχει οπωσδήποτε στην επιτροπή είναι:

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}=150$$

Τότε:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}}=\frac{150}{350}=0.42857$$

β) Το πλήθος των επιτροπών όταν δύο συγκεκριμένοι Γεωπόνοι δεν συμμετέχουν στην επιτροπή:

$$\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{3}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot 4!}=105$$

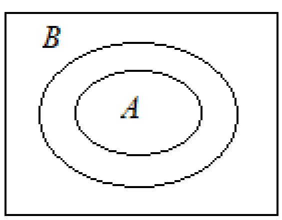
Τότε:

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}}=\frac{105}{350}=0.3$$

8. Σε μια χώρα η πιθανότητα να ζήσει ένας άνδρας τουλάχιστον 70 χρόνια είναι 0.85, ενώ η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον 75 χρόνια είναι 0.80. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν 70χρονο άνδρα από τη χώρα αυτή, ποια είναι η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον άλλα 5 χρόνια.

Έστω A={το ενδεχόμενο ένας άνδρας να ζήσει τουλάχιστον 75 χρόνια} και

B={ το ενδεχόμενο ένας άνδρας να ζήσει τουλάχιστον 70 χρόνια }



$A \subseteq B$

Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{0.80}{0.85}=0.94$$

Επειδή $A \subseteq B \;\; τότε \quad A \cap B = A \quad και \;\; P(AB)=P(A)$

9. Από επτά όμοια κλειδιά ένα μόνο ανοίγει μια κλειδαριά. Δοκιμάζουμε χωρίς επανάθεση ένα-ένα τα κλειδιά μέχρι να ανοίξει η κλειδαριά. Ποια η πιθανότητα να συμβεί αυτό στην τρίτη δοκιμή; Γενικότερα στην κ δοκιμή; (όπου κ = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Έστω A_i ={η κλειδαριά ανοίγει στην i δοκιμή} $i = 1,2, \dots ,7$

Η πιθανότητα να ανοίξει η κλειδαριά στην τρίτη δοκιμή είναι:

$P(A'_1\, A'_2\, A_3) = P(A'_1) \cdot P(A'_2 \,/\, A'_1) \cdot P(A_3 \,/\, A'_1\, A'_2) = \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{7}$

Για κάθε δοκιμή κ = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 προκύπτει η ίδια πιθανότητα $1/7$.

10. Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν 10 κουνέλια από τα οποία τα 3 είναι θηλυκά. Για τον έλεγχο του πληθυσμού των κουνελιών κρίθηκε σκόπιμο να απομακρυνθούν δύο από τα θηλυκά. Έτσι στήθηκε μια παγίδα όπου πιάνονταν τα κουνέλια το ένα μετά το άλλο, έως ότου πιαστούν δύο θηλυκά. Ποια η πιθανότητα να συμβεί αυτό, όταν πιαστεί το τέταρτο στη σειρά κουνέλι.

Έστω A_i ={το ενδεχόμενο να πιάνεται θηλυκό κουνέλι στην i προσπάθεια} $i = 1, 2, 3, 4$

Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned}
&P(A'_1\, A'_2\, A_3\, A_4 \cup A'_1\, A_2\, A'_3\, A_4 \cup A_1\, A'_2\, A'_3\, A_4) = \\
&\qquad = P(A'_1\, A'_2\, A_3\, A_4) + P(A'_1\, A_2\, A'_3\, A_4) + P(A_1\, A'_2\, A'_3\, A_4) \\
&\qquad = P(A'_1) \cdot P(A'_2/A'_1) \cdot P(A_3/A'_1A'_2) \cdot P(A_4/A'_1A'_2A_3) \\
&\qquad + P(A'_1) \cdot P(A_2/A'_1) \cdot P(A'_3/A'_1A_2) \cdot P(A_4/A'_1A_2A'_3) \\
&\qquad + P(A_1) \cdot P(A'_2/A_1) \cdot P(A'_3/A_1A'_2) \cdot P(A_4/A_1A'_2A'_3) = \\
&\qquad = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} == 0.05 + 0.05 + 0.05 \\
&\qquad = 0.15
\end{aligned}$$

11. Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Ζητούνται οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

E_1 = { Το 1^o παιδί είναι κορίτσι}

E_2 = { Στα δύο πρώτα παιδιά τουλάχιστον ένα είναι κορίτσι}

E_3 = { Τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου}

Επίσης να βρεθούν οι δεσμευμένες πιθανότητες: $P(E_1 / E_2)$, $P(E_3 / E_1)$, $P(E_2 / E_1)$ και να εξεταστεί εάν τα E_1, E_2, E_3 είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Ο δειγματικός χώρος έχει $2^3 = 8$ σημεία:

$\Omega = \{KKK, KKA, AKK, KAK, AAK, AKA, KAA, AAA\}$

$P(E_1) = 4/8 = 0.5, \qquad P(E_2) = 6/8 = 0.75, \qquad P(E_3) = 4/8 = 0.5$

και

$$P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1)}{P(E_2)} = \frac{4/8}{6/8} = 2/3$$

$$P(E_3/E_1) = \frac{P(E_3E_1)}{P(E_1)} = \frac{2/8}{4/8} = 1/2$$

$$P(E_2/E_1) = \frac{P(E_2E_1)}{P(E_1)} = \frac{4/8}{4/8} = 1$$

Τα E_1, E_2, E_3 είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα εάν ισχύουν και οι 4 επόμενες σχέσεις

i) $P(E_1E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

ii) $P(E_1E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)$

iii) $P(E_2E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$

iv) $P(E_1E_2E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$

Επειδή όμως $P(E_1E_2) = 4/8 \quad και \quad P(E_1) \cdot P(E_2) = 4/8 \times 6/8 = 6/16$

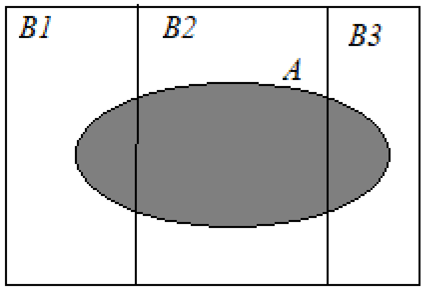
τα E_1, E_2, E_3 δεν είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

12. Σε κάποιο εργαστήριο υπάρχουν 3 φάρμακα Φ1, Φ2, $Φ_3$ που έχουν όμοια εμφάνιση. Υπάρχουν 2 φιάλες με το φάρμακο $Φ_1$, 3 φιάλες με το φάρμακο $Φ_2$, 1 φιάλη με το $Φ_3$ και κάποιος ξεκόλλησε τις αντίστοιχες ετικέτες από τις φιάλες. Αν κάνουμε ένεση σε ινδικά χοιρίδια, τότε αναπτύσσεται μια αντιτοξίνη σε ποσοστό 25% αν χρησιμοποιηθεί το φάρμακο $Φ_1$, 12% αν χρησιμοποιηθεί το $Φ_2$ και 30% αν χρησιμοποιηθεί το $Φ_3$. Παίρνουμε τυχαία μια φιάλη και κάνουμε ένεση σε ένα ινδικό χοιρίδιο. i) Ποια η πιθανότητα να αναπτυχθεί αντιτοξίνη στο χοιρίδιο, ii) Αν διαπιστωθεί ότι στο ινδικό χοιρίδιο αναπτύχθηκε αντιτοξίνη, ποια η πιθανότητα να πήραμε το φάρμακο $Φ_1$, iii) Αν δεν αναπτύχθηκε αντιτοξίνη, ποια η πιθανότητα να κάναμε ένεση με το φάρμακο $Φ_2$.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A = {αναπτύσσεται αντιτοξίνη στο χοιρίδιο}

B_i = {γίνεται ένεση με το φάρμακο Φi}, *i=1, 2, 3*



$P(B_1) = 2/6$, $P(B_2) = 3/6$, $P(B_3) = 1/6$,

$P(A/B_1) = 0.25$, $P(A/B_2) = 0.12$, $P(A/B_3) = 0.30$

i) $P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup AB_3) = P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3) =$

$= \boldsymbol{P(A/B_1)\, P(B_1) + P(A/B_2)\, P(B_2) + P(A/B_3)\, P(B_3)} =$

$= 0.25 \times 2/6 + 0.12 \times 3/6 + 0.30 \times 1/6 = 0.1933$ ή 19.33%

ii)

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)\, P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.25 \times 2/6}{0.1933} = 0.4311 \quad \text{ή} \quad 43.11\%$$

iii) Έστω Α΄ το συμπλήρωμα του ενδεχομένου Α, δηλαδή

Α΄ = {δεν αναπτύσσεται αντιτοξίνη στο χοιρίδιο}

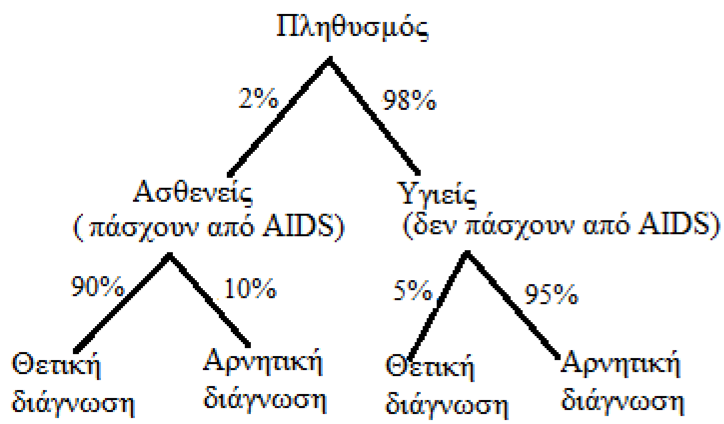
τότε $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.1933 = 0.8067$ και

$P(A' \,/\, B_2) = 1 - P(A/B) = 1 - 0.12 = 0.88$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(B_2/A') = \frac{P(A'/B_2)\, P(B_2)}{P(A')} = \frac{(1 - 0.12) \times 3/6}{1 - 0.1933} = 0.5454 \quad \text{ή} \quad 54.54\%$$

13. Το 2% ενός πληθυσμού πάσχει από AIDS. Η εξέταση που εφαρμόζεται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει σωστή διάγνωση στο 90% των περιπτώσεων, όταν το εξεταζόμενο άτομο πάσχει από AIDS και στο 95% των περιπτώσεων, όταν δεν πάσχει από AIDS. Επιλέγεται ένα άτομο τυχαία και υποβάλλεται στην εξέταση. **α)** Ποια η πιθανότητα η εξέταση να βγει θετική, δηλαδή να δείξει ότι πάσχει από AIDS. **β)** Ποια η πιθανότητα λανθασμένης διάγνωσης. **γ)** Ποια η πιθανότητα να πάσχει πράγματι από AIDS ένα άτομο, για το οποίο η εξέταση ήταν θετική. **δ)** Ποια είναι η πιθανότητα να είναι υγιές ένα άτομο για το οποίο η εξέταση ήταν θετική.



Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α = {το διαγνωστικό τεστ είναι θετικό}

Β = {το άτομο πάσχει από AIDS}   Β΄ = {το άτομο δεν πάσχει από AIDS}

Γ = {το τεστ δίνει λάθος διάγνωση}

α) Από το θεώρημα της ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(A) = P(A/B)\,P(B) + P(A/B')\,P(B') = 0.90 \times 0.02 + 0.05 \times 0.98 = 0.067$$

β) $P(\Gamma) = P(\Gamma/B)\,P(B) + P(\Gamma/B')\,P(B') = 0.10 \times 0.02 + 0.05 \times 0.98 =$

$= 0.051$ ή 5.1%

γ) Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes έχουμε:

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)\,P(B)}{P(A)} = \frac{0.90 \times 0.02}{0.067} = 0.2687$$

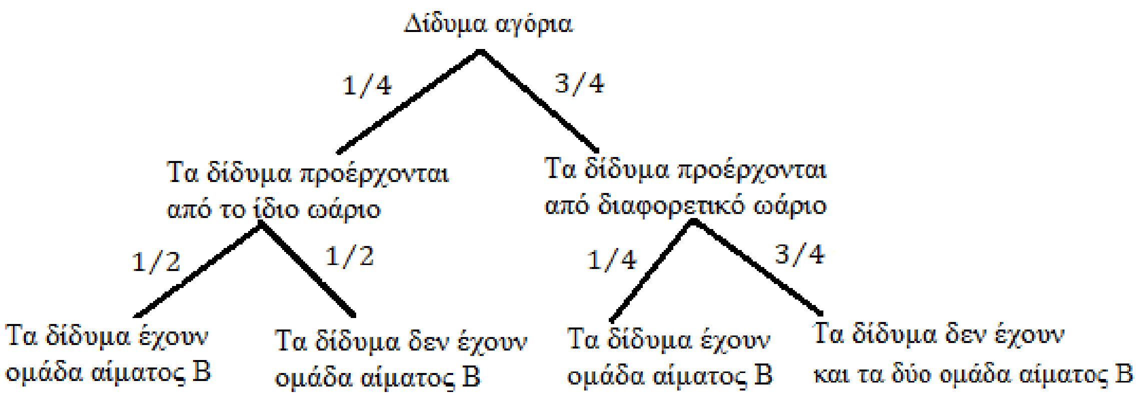
δ)

$$P(B'/A) = \frac{P(A/B')\,P(B')}{P(A)} = \frac{0.05 \times 0.98}{0.067} = 0.7313$$

ή $P(B'/A) = 1 - P(B/A) = 1 - 0.2687 = 0.7313$ ή 73.13%

14. Έστω ένα ζευγάρι, του οποίου η γυναίκα έχει ομάδα αίματος *O* και ο άνδρας έχει ομάδα αίματος *AB*. Είναι γνωστό ότι: **i)** όταν οι ομάδες αίματος *O* και *AB* διασταυρώνονται, το 50% των απογόνων έχουν ομάδα αίματος *A* και το 50% ομάδα αίματος *B*, **ii)** δίδυμα που προέρχονται από το ίδιο ωάριο έχουν την ίδια ομάδα αίματος, ενώ δίδυμα από διαφορετικά ωάρια μπορεί να έχουν ίδια ή διαφορετική ομάδα αίματος, **iii)** το ένα τέταρτο των διδύμων προέρχεται από το ίδιο ωάριο. Δεδομένου ότι το ζευγάρι αποκτά δίδυμα αγόρια με ομάδα αίματος *B*, ποια η πιθανότητα τα δίδυμα να προέρχονται από το ίδιο ωάριο;

Τα δίδυμα αγόρια μπορεί να προέρχονται από το ίδιο ωάριο ή από διαφορετικά ωάρια.



Έστω B_1 ={ τα δίδυμα αγόρια προέρχονται από το ίδιο ωάριο }

B_2 ={ τα δίδυμα αγόρια προέρχονται από διαφορετικά ωάρια } και

A = {τα δίδυμα αγόρια έχουν ομάδα αίματος B}

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

P (τα δίδυμα αγόρια να προέρχονται από το ίδιο ωάριο / τα δίδυμα αγόρια έχουν ομάδα αίματος B) = $P(B_1/A)$

Από το τύπο του Bayes έχουμε:

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)\,P(B_1)}{P(A)}$$

Αλλά εφαρμόζοντας τον τύπο της ολικής πιθανότητας βρίσκουμε το $P(A)$:

$$P(A) = P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A/B_2)\,P(B_2)$$

Από τα ενδεχόμενα του προβλήματος έχουμε:

$P(B_1) = 1/4, \quad P(B_2) = 3/4$

$P(A/B_1) = 1/2$ (πιθανές ομάδες αίματος ΒΒ ή ΑΑ για τα δίδυμα που προέρχονται από το ίδιο ωάριο)

Τα δίδυμα που προέρχονται από διαφορετικά ωάρια, το κάθε ένα θα έχει πιθανότητα $1/2$ να έχει ομάδα αίματος B και:

$P(A/B_2) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$ (πιθανές ομάδες αίματος BB, AB, BA, AA για τα δίδυμα που προέρχονται από διαφορετικά ωάρια)

Επομένως:

$$P(A) = P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A/B_2)\,P(B_2) = 1/2 \times 1/4 + 1/4 \times 3/4 = 5/16$$

και

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)\,P(B_1)}{P(A)} = \frac{1/2 \times 1/4}{5/16} = 2/5 = 0.4 \quad \text{ή} \quad 40\%$$

15. Σε μια εξέταση δίνονται τέσσερις απαντήσεις σε κάθε ερώτηση και σωστή είναι μόνο μία από τις τέσσερις. Η πιθανότητα να γνωρίζει ο εξεταζόμενος την απάντηση μιας ερώτησης είναι 70%. Στις περιπτώσεις που ο εξεταζόμενος δεν γνωρίζει την απάντηση σε μια ερώτηση, απαντάει εντελώς τυχαία διαλέγοντας μια από τις τέσσερις που δίδονται. Αν ο εξεταζόμενος απαντήσει σωστά σε μια ερώτηση, ποια είναι η πιθανότητα να γνώριζε την απάντηση;

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A = {ο εξεταζόμενος απαντά σωστά} και

B = {ο εξεταζόμενος γνωρίζει την απάντηση}

τότε B΄ = {ο εξεταζόμενος δεν γνωρίζει την απάντηση}

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes έχουμε:

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$$

Την πιθανότητα $P(A)$ θα την υπολογίσουμε από το θεώρημα της ολικής πιθανότητας:

$$P(A) = P(A/B)\,P(B) + P(A/B')\,P(B') = 1 \times 0.70 + 0.25 \times 0.30 = 0.775$$

Τότε:

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} = \frac{1 \times 0.70}{0.775} = 0.9032 \quad \text{ή} \quad 90.32\%$$

16. Το 45% του πληθυσμού μιας χώρας είναι καπνιστές. Από μια ασθένεια των πνευμόνων πάσχει το 80% των καπνιστών και το 30% των μη καπνιστών. α) Ποιο ποσοστό του πληθυσμού πάσχει από την ασθένεια των πνευμόνων. β) Αν ένα άτομο από τον πληθυσμό πάσχει από αυτήν την ασθένεια, ποια η πιθανότητα να είναι καπνιστής. Ερμηνεύστε την πιθανότητα αυτή ως ποσοστό. γ) Τα ενδεχόμενα *«ένα άτομο να είναι καπνιστής»* και το «*ένα άτομο να πάσχει από τη συγκεκριμένη ασθένεια*» είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα ή εξαρτημένα ενδεχόμενα;

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$A = \{\text{το άτομο πάσχει από ασθένεια των πνευμόνων}\}$

$B = \{\text{το άτομο είναι καπνιστής}\}$ τότε $B' = \{\text{το άτομο δεν είναι καπνιστής}\}$

α) $P(A) = P(A/B)\,P(B) + P(A/B')\,P(B') = 0.80 \times 0.45 + 0.30 \times 0.55 = 0.525$ ή 52.5%

β)

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.80 \times 0.45}{0.525} = 0.6857 \quad \text{ή} \quad 68.57\%$$

γ) Τα ενδεχόμενα *A* και *B* είναι ανεξάρτητα εάν: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Αλλά $P(AB) = P(A/B)P(B) = 0.80 \times 0.45 = 0.36$,

$P(A) = 0.525, \quad P(B) = 0.45$

Επομένως $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$ και τα ενδεχόμενα A και B είναι εξαρτημένα ενδεχόμενα.