Στοιχεία από την Συνδυαστική

Πολλαπλασιαστική αρχή

Αν το στοιχείο A_1 μπορεί να επιλεγεί με ν_1 διαφορετικούς τρόπους και για κάθε επιλογή του A_1, το στοιχείο A_2 μπορεί να επιλεγεί με ν_2 διαφορετικούς τρόπους, …. και για κάθε επιλογή των στοιχείων A_1, A_2, … $A_{\kappa-1}$, το στοιχείο A_κ μπορεί να επιλεγεί με ν_κ διαφορετικούς τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία A_1, A_2,…, A_κ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτή τη συγκεκριμένη σειρά κατά $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_\kappa$ τρόπους.

Διατάξεις

Όταν έχουμε ν διαφορετικά στοιχεία και τοποθετούμε στη σειρά κ από αυτά, έχουμε μία διάταξη των ν στοιχείων ανά κ. Το πλήθος όλων των διαφορετικών διατάξεων των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζεται με $(\nu)_k$ και είναι:

$$(\nu)_k = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1) = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}\,, \quad 1 \le \kappa \le \nu$$

όπου $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \nu$, $\quad 1! = 1$, $\quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ και $0! = 1$

Όταν $\kappa = \nu$ έχουμε τις **μεταθέσεις** των ν στοιχείων, των οποίων το πλήθος είναι:

$$(\nu)_\nu = \nu(\nu-1)\ldots 2 \cdot 1 = \nu!\,, \qquad \nu \ge 1$$

Για παράδειγμα με τα ψηφία 1, 3, 7, 8 μπορούμε να σχηματίσουμε $4! = 24$ διαφορετικούς τετραψήφιους αριθμούς, ενώ με τα ίδια ψηφία μπορούμε να έχουμε $(4)_2 = 4 \cdot 3 = 12$ διαφορετικούς διψήφιους αριθμούς.

Επαναληπτικές διατάξεις

Όταν από τα ν στοιχεία επιλέγουμε κ, αλλά κάθε ένα από αυτά μπορεί να επιλεγεί όσες φορές θέλουμε, τότε έχουμε τις επαναληπτικές διατάξεις των ν στοιχείων ανά κ και το πλήθος τους είναι:

$$\nu \cdot \nu \cdot \ldots \cdot \nu = \nu^\kappa, \qquad \nu \ge 1, \kappa \ge 1$$

Μεταθέσεις με όμοια στοιχεία

Αν τα ν στοιχεία δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, αλλά υπάρχουν κάποια όμοια στοιχεία. Εάν τα ν_1 είναι ενός είδους A_1, τα ν_2 είναι ενός άλλου είδους A_2, ….. και τα ν_κ είναι κάποιου άλλου είδους A_κ, όπου $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu$, τότε οι διαφορετικές μεταθέσεις των ν στοιχείων είναι:

$$\binom{\nu}{\nu_1, \nu_{2,} \ldots, \nu_\kappa} = \frac{\nu!}{\nu_1! \cdot \nu_2! \cdot \ldots \cdot \nu_\kappa!}$$

Συνδυασμοί

Αν από τα ν διαφορετικά στοιχεία πάρουμε κ χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους, αλλά μόνο ποια στοιχεία πήραμε, τότε έχουμε τους συνδυασμούς των ν στοιχείων ανά κ, που συμβολίζονται με $\binom{\nu}{\kappa}$ και το πλήθος τους είναι:

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1)}{\kappa!} = \frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!} \quad , \qquad 1 \leq \kappa \leq \nu$$

Δειγματοληψία

Όταν έχουμε ν στοιχεία και θέλουμε να πάρουμε από αυτά ένα δείγμα μεγέθους κ, μπορούμε να το πραγματοποιήσουμε με τους εξής τρόπους:

i) Παίρνουμε ένα-ένα στοιχείο, το εξετάζουμε και το επανατοποθετούμε εκεί από όπου το πήραμε, πριν πάρουμε το επόμενο στοιχείο. Συνεχίζουμε κατ’ αυτόν τον τρόπο μέχρι να πάρουμε κ στοιχεία. Τότε έχουμε **δειγματοληψία με επανάθεση** και υπάρχουν ν^κ διαφορετικά τέτοια δείγματα.

ii) Παίρνουμε ένα-ένα στοιχείο, το εξετάζουμε και δεν το επανατοποθετούμε. Συνεχίζουμε κατ’ αυτόν τον τρόπο μέχρι να πάρουμε κ στοιχεία. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε **δειγματοληψία χωρίς επανάθεση** και τότε υπάρχουν $(\nu)_k = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1)$ διαφορετικά τέτοια δείγματα.

iii) Παίρνουμε κ από τα ν στοιχεία μαζί. Σε αυτή την περίπτωση δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τα πήραμε, αλλά μόνο ποια στοιχεία πήραμε. Τότε έχουμε $\binom{\nu}{\kappa}$ δείγματα.

Στην περίπτωση i) το ίδιο στοιχείο μπορεί να εμφανιστεί μέχρι κ φορές, ενώ στις ii) και iii) όλα τα στοιχεία του δείγματος είναι διαφορετικά.

Όταν λέμε ότι παίρνουμε ένα **τυχαίο δείγμα** μεγέθους κ θα εννοούμε ότι η δειγματοληψία γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε όλα τα δείγματα μεγέθους κ έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής.

Λύσεις ασκήσεων από το **φυλλάδιο 3 - Προβλήματα απαρίθμησης**

1. Μια πόλη Α συνδέεται με την πόλη Β μέσω τριών δρόμων, η πόλη Β συνδέεται με την πόλη Γ μέσω πέντε δρόμων και τέλος η πόλη Γ συνδέεται με την πόλη Δ μέσω οκτώ δρόμων. Από πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί να επιλέξει κάποιος για να ταξιδέψει:
α) από την πόλη Α στην πόλη Γ
β) από την πόλη Β στην πόλη Δ
γ) από την πόλη Α στην πόλη Δ
δ) από την πόλη Α στην πόλη Δ και στη συνέχεια να επιστρέψει στην πόλη Β.

Εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε:
α) $3 \cdot 5 = 15$ διαφορετικές διαδρομές για να πάμε από τη πόλη Α στην πόλη Γ.

β) $5 \cdot 8 = 40$ διαφορετικές διαδρομές για να πάμε από τη πόλη Β στην πόλη Δ.

γ) $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$ διαφορετικές διαδρομές για να πάμε από τη πόλη Α στην πόλη Δ.

δ) $3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 5 = 4800$ διαφορετικές διαδρομές για να πάμε από τη πόλη Α στην Δ και

στη συνέχεια να επιστρέψουμε στην πόλη Β.

7. Πόσοι ακέραιοι με διαφορετικά ψηφία μεταξύ 3000 και 4000 σχηματίζονται από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Για να σχηματίσουμε ακεραίους αριθμούς μεταξύ των 3000 και 4000 θα πρέπει το 1^o το πρώτο ψηφίο να είναι το 3 (μία επιλογή). Για το 2^o ψηφίο έχουμε 8 επιλογές (κάποιο από τα ψηφία 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 που απέμειναν, καθώς θέλουμε όλα τα ψηφία των αριθμών να είναι διαφορετικά), για το 3^o ψηφίο έχουμε 7 επιλογές (αφαιρώντας από τα 9 ψηφία που είχαμε τα δύο πρώτα ψηφία που έχουν επιλεγεί) και για το 4^o ψηφίο έχουμε 6 επιλογές.

Εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή θα έχουμε $1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ αριθμούς με διαφορετικά ψηφία.
Αλλιώς, εκτός από την μοναδική επιλογή του 1ου ψηφίου για τα υπόλοιπα τρία έχουμε $(8)_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ αριθμούς, όσες και οι διατάξεις των 8 ψηφίων ανά 3.

2. Οι αριθμοί κυκλοφορίας των αυτοκινήτων δημιουργούνται από τρία γράμματα και ένα τετραψήφιο αριθμό. Για το πρώτο τμήμα του αριθμού χρησιμοποιούνται τα 14 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, τα οποία συμπίπτουν με λατινικούς χαρακτήρες (A, B, E, Z, H, I, K, M, N, O, Π, T, Y, X) ενώ στην πρώτη θέση του δευτέρου δεν χρησιμοποιείται ο αριθμός 0.
α) Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας μπορούν να δημιουργηθούν.
β) Πόσοι από τους διαφορετικούς αριθμούς που μπορούν να δημιουργηθούν: i) έχουν και τα τρία γράμματα του πρώτου μέρους διαφορετικά μεταξύ τους ii) έχουν ως πρώτο γράμμα φωνήεν iii) έχουν στην πρώτη και στην τρίτη θέση φωνήεντα και iv) δεν περιέχουν στο δεύτερο τμήμα τους ίδια ψηφία.

Για το 1ο τμήμα του αριθμού κυκλοφορίας επιλέγονται 3 γράμματα από τα 14 με επανάθεση (εάν κάποιο γράμμα επιλεγεί μπορεί να ξαναεπιλεγεί και 2η ή 3η φορά), ενώ για το 2ο τμήμα του αριθμού επιλέγονται 4 ψηφία από τα 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 με επανάθεση (μόνο το 0 δεν μπορεί να επιλεγεί ως 1ο ψηφίο).

α) $14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 24.696.000$ αριθμοί κυκλοφορίας

ή $14^3 \cdot 9 \cdot 10^3 = 24.696.000$ (επαναληπτικές διατάξεις)

β) i) $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 19.656.000$ αριθμοί κυκλοφορίας

Επομένως έχουμε 14 επιλογές για το 1ο γράμμα (που έστω ότι είναι το A), 13 επιλογές για το 2ο γράμμα (14 επιλογές εκτός του A, που έχει ήδη επιλεγεί), 12 επιλογές για το 3ο γράμμα…..

ii) Έχουμε 6 επιλογές για το 1ο γράμμα (A, E, H, I, O, Y), 14 επιλογές για το 2ο γράμμα….
$6 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.584.000$ αριθμοί κυκλοφορίας
iii) $6 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 4.536.000$ αριθμοί κυκλοφορίας

iv) $14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 12.446.784$ αριθμοί κυκλοφορίας

8. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης «ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ» υπάρχουν.

Η λέξη ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ έχει 11 γράμματα, εκ των οποίων κάποια είναι διπλά (Σ:2, Υ:2). Χρησιμοποιώντας τον τύπο των μεταθέσεων με όμοια στοιχεία έχουμε:

$$\binom{11}{2,2,1,\dots,1} = \frac{11!}{2!\ \cdot 2! \cdot 1! \dots \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \dots 1} = 9.979.000$$

9. Πέντε όμοιες λεύκες, δύο όμοια πεύκα και τρία όμοια έλατα πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για να δημιουργηθεί μια δενδροστοιχία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό.

Έχουμε 10 δένδρα, εκ των οποίων κάποια είναι όμοια (5Λ, 2Π, 3Ε). Χρησιμοποιώντας τον τύπο των μεταθέσεων με όμοια στοιχεία έχουμε:

$$\binom{10}{5,2,3} = \frac{10!}{5!\ \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2520$$

12. Ένα δελτίο ΠΡΟΠΟ περιλαμβάνει 13 αγώνες καταχωρημένους σε μία στήλη και δίπλα σε κάθε αγώνα σημειώνεται 1, Χ, 2. α) Πόσες διαφορετικές στήλες μπορούν να σχηματιστούν. β) Αν για 6 συγκεκριμένους αγώνες χρησιμοποιήσουμε 1 σύμβολο, για 5 άλλους συγκεκριμένους αγώνες 2 σύμβολα και για τους υπόλοιπους 2 αγώνες 3 σύμβολα, πόσες διαφορετικές στήλες θα προκύψουν.

α) Έχουμε 3 επιλογές για τον 1^{ο} αγώνα (1, Χ, 2), 3 επιλογές για τον 2^{ο} αγώνα (1, Χ, 2), κ.ο.κ. 3 επιλογές για τον 13^{ο} αγώνα (1, Χ, 2). Συνολικά (πολλαπλασιαστική αρχή) έχουμε:

$3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 3^{13}$ =1.594.323 διαφορετικές στήλες (επαναληπτικές διατάξεις)

β) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3^2 = 288$ διαφορετικές στήλες (επαναληπτικές διατάξεις)

15. Από 8 άτομα, πόσες διαφορετικές τριμελείς επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν.

Από τα 8 άτομα επιλέγουμε 3, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, αλλά μόνο ποια άτομα έχουν επιλεγεί. Επομένως έχουμε συνδυασμούς των 8 ατόμων ανά 3.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$$

17. Από οκτώ φοιτητές και τέσσερις καθηγητές πόσες ομάδες των έξι ατόμων στις οποίες συμμετέχει τουλάχιστον ένας καθηγητής μπορούν να σχηματιστούν.

Στις ομάδες των 6 ατόμων μπορεί να συμμετέχει 1 καθηγητής (Κ) και 5 φοιτητές (Φ) ή 2Κ και 4Φ ή 3Κ και 3Φ ή 4Κ και 2Φ. Δεν να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, αλλά μόνο ποια άτομα έχουν επιλεγεί. Το πλήθος των ομάδων των 6 ατόμων είναι:

$$\binom{4}{1}\cdot\binom{8}{5} + \binom{4}{2}\cdot\binom{8}{4} + \binom{4}{3}\cdot\binom{8}{3} + \binom{4}{4}\cdot\binom{8}{2} =$$

$$= \frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{8!}{5!\cdot 3!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{8!}{4!\cdot 4!} + \frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{8!}{3!\cdot 5!} + \frac{4!}{4!\cdot 0!}\cdot\frac{8!}{2!\cdot 6!} = 896$$

$0! = 1$ εξ ορισμού.

18. Μια επιτροπή αποτελείται από 2 Γεωπόνους και 3 Μηχανικούς που επιλέγονται από 5 Γεωπόνους και 7 Μηχανικούς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματισθεί αυτή η επιτροπή, α) χωρίς άλλους περιορισμούς, β) έτσι ώστε ένας συγκεκριμένος Μηχανικός να συμμετέχει οπωσδήποτε, γ) έτσι ώστε 2 συγκεκριμένοι Γεωπόνοι να μην συμμετέχουν.

Από 5 Γεωπόνους (Γ) και 7 Μηχανικούς (Μ) επιλέγουμε 2Γ και 3Μ. Δεν να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, αλλά μόνο ποια άτομα έχουν επιλεγεί. Το πλήθος των επιτροπών είναι:

$\alpha)\ \binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot 4!} = 350$

$\beta)$ Ένας Μηχανικός συμμετέχει οπωσδήποτε, οπότε μένει να επιλεγούν 2Γ και 2Μ από 5Γ και 6Μ.

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!} = 150$$

$\gamma)$ Δύο Γεωπόνοι δεν συμμετέχουν, οπότε επιλέγονται 2Γ και 3Μ από 3Γκαι 7Μ.

$$\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{3} = \frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot 4!} = 105$$