

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών



Ομολογιακά Δάνεια

- Ονομάζονται τα δάνεια που προσφέρονται από πολλούς δανειστές.
- Αφορούν μεγάλα ποσά και λαμβάνονται από κράτη, δήμους, μεγάλους οικονομικούς οργανισμούς, μεγάλες ανώνυμες εταιρείες, κτλ.
- Το συνολικό ποσό του δανείου διαιρείται σε μικρότερα μέρη τα οποία δανείζονται από πολλούς δανειστές. Τα μέρη του συνολικού δανείου ονομάζονται **ομολογίες** ενώ δάνειο **ομολογιακό**.



- Οι ομολογίες αναγράφουν το ποσό του δανείου, το επιτόκιο, τον τόπο και το χρόνο πληρωμής του δανείου και των τόκων.
- Το ποσό που αναγράφεται στην ομολογία λέγεται **ονομαστική αξία** ενώ η τιμή στην οποία διατέθηκαν οι ομολογίες λέγεται **τιμή έκδοσης**.
- Όταν η τιμή έκδοσης της ομολογίας ισούται με την ονομαστική της αξία τότε το δάνειο εκδίδεται **στο άρτιο**.
- Όταν είναι μεγαλύτερη/μικρότερη τότε το δάνειο εκδίδεται **κάτω/πάνω από το άρτιο**.
- Η τιμή στην οποία εξοφλείται η ομολογία στο χρόνο λήξης της λέγεται **τιμή εξόφλησης**.



- Η τιμή που έχει η ομολογία σε χρόνο μετά την έκδοσή της λέγεται **τρέχουσα τιμή**.
- Οι ομολογίες διακρίνονται σε **ονομαστικές, στον κομιστή και μικτές**.
- Οι ομολογίες διακρίνονται επίσης σε **απλές** (όταν η ονομαστική αξία είναι ίση με το μικρότερο ποσό που διαιρέθηκε το δάνειο) και σε **πολλαπλές** (όταν η ονομαστική αξία είναι πολλαπλάσια της απλής).
- Τα ομολογιακά δάνεια και οι ομολογίες δεν πρέπει να συγχέονται με τα ομόλογα. Τα ομόλογα είναι πιστωτικοί τίτλοι που εκδίδονται για να καλύψουν συγκεκριμένο δάνειο και εξοφλούνται σε διάστημα μέχρι ένα έτος και σε τιμή ίση με την ονομαστική αξία.



- Στα ομολογιακά δάνεια οι τόκοι εξοφλούνται με τα τοκομερίδια. Στο τέλος κάθε εξαμήνου οι ομολογιούχοι κόβουν από τις ομολογίες τους τα αντίστοιχα τοκομερίδια και εισπράττουν τους τόκους.
- Συνήθως εφαρμόζεται η μέθοδος του προοδευτικού χρεολυσίου για την εξόφληση.
- Η εξόφληση του ομολογιακού δανείου γίνεται προοδευτικά με κλήρωση ορισμένου αριθμού ομολογιών. Σε καθορισμένη ημερομηνία κληρώνεται ορισμένος αριθμός ομολογιών οποίος είναι ανάλογος με το χρεολύσιο του δανείου, οπότε καλούνται οι ομολογιούχοι να δώσουν τις ομολογίες που κληρώθηκαν και να εισπράξουν τα αντίστοιχα ποσά.



Συμβολισμοί Ομολογιακών Δανείων

- **N**: αριθμός ομολογιών κατά τη σύναψη του δανείου.
- **C**: ονομαστική αξία της απλής ομολογίας.
- **K=N×C**: ονομαστική αξία του δανείου όταν η εξόφληση γίνεται στο άρτιο.
- **C'**: τιμή εξόφλησης της απλής ομολογίας σε τιμή διαφορετική από το άρτιο.
- **Z**: τιμή έκδοσης της ομολογίας.
- **i**: ονομαστικό επιτόκιο δανείου.
- **n**: διάρκεια ομολογιακού δανείου (χρονικές περίοδοι).
- **R**: τοκοχρεολύσιο δανείου.



- Y_μ : αριθμός των εξοφλούμενων ομολογιών (των ομολογιών που πληρώνονται) στο τέλος της περιόδου μ .
- M_μ : αριθμός των ομολογιών που έχουν εξοφληθεί μέχρι το τέλος της περιόδου μ .
- N_μ : αριθμός ομολογιών που βρίσκονται «εν ζωή» στο τέλος της περιόδου μ .



Μέθοδοι Απόσβεσης Ομολογιακών Δανείων

- Απόσβεση με ίσο αριθμό ομολογιών σε κάθε περίοδο.
- Απόσβεση όλων των ομολογιών σε ορισμένη χρονική στιγμή.
- Απόσβεση με την προοδευτική μέθοδο στο άρτιο/Ομολογιακά δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά στο άρτιο.
- Απόσβεση με την προοδευτική μέθοδο σε τιμές διάφορες του αρτίου/Ομολογιακά δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά σε τιμές διάφορες του αρτίου.



Μέθοδος απόσβεσης ίσου αριθμού ομολογιών σε κάθε περίοδο

- Στηρίζεται στη μέθοδο ίσων μερών κεφαλαίου.
- Έστω ότι η εξόφληση των ομολογιών γίνεται σε n περιόδους τότε σε κάθε περίοδο εξαγοράζονται N/n ομολογίες.
- Χρεολύσιο και εξοφλούμενες ομολογίες διατηρούνται σταθερά σε όλο το διάστημα της εξόφλησης.
- Ο τόκος υπολογίζεται σε κάθε περίοδο πάνω στην ονομαστική αξία των ομολογιών που δεν έχουν εξοφληθεί στην αρχή της περιόδου άρα το τοκοχρεολύσιο δεν είναι σταθερό.



Εξόφληση όλων των ομολογιών σε ορισμένη χρονική στιγμή

- Η εξόφληση όλου του ποσού λαμβάνει χώρα την ημερομηνία λήξης του ομολογιακού δανείου.
- Συνήθως στο τέλος της κάθε χρονικής περιόδου ο οργανισμός που έχει εκδόσει το ομολογιακό δάνειο καταθέτει στην τράπεζα ένα σταθερό ποσό, το οποίο ανατοκίζεται με επιτόκιο t που είναι διαφορετικό από το επιτόκιο του ομολογιακού δανείου i . Γενικά ισχύει $t < i$.



Εξόφληση με προοδευτική μέθοδο στο άρτιο

- Το τοκοχρεολύσιο που διατίθεται σε κάθε περίοδο για την εξόφληση ομολογιών και την πληρωμή τόκων δίνεται ως εξής $R = K \times i + k \times P_{n|i} = N \times C \times i + N \times C \times P_{n|i}$ όπου $P_{n|i}$ το χρεολύσιο μίας νομισματικής μονάδας.
- Το χρεολύσιο της μ περιόδου δίνεται ως εξής $P_{\mu} = N \times C \times P_{n|i} \times (1+i)^{\mu-1}$
- Ο αριθμός των ομολογιών που βρίσκονται εν ζωή στην αρχή της περιόδου $\mu+1$ δίνεται ως εξής $N_{\mu+1} = N - N \times P_{n|i} \times S_{\mu|i}$
- Ο συνολικός αριθμός ομολογιών που έχουν εξοφληθεί μέχρι και την περίοδο μ δίνεται ως εξής $M_{\mu} = N \times P_{n|i} \times S_{\mu|i}$
- Οι εξοφλούμενοι τίτλοι στο τέλος της περιόδου μ δίνονται ως εξής $Y_{\mu} = N \times P_{n|i} \times (1+i)^{\mu-1}$



Εξόφληση με προοδευτική μέθοδο σε τιμές διάφορες του αρτίου

- Έκδοση ομολογιών υπό το άρτιο έχουμε όταν για την απόκτηση της ομολογίας κατά το χρόνο έκδοσης του δανείου διαθέτουμε ποσό μικρότερο από την ονομαστική της αξία.
- Έκδοση ομολογιών υπέρ το άρτιο έχουμε όταν για την απόκτηση της ομολογίας κατά το χρόνο έκδοσης του δανείου διαθέτουμε ποσό μεγαλύτερο από την ονομαστική της αξία.
- Η τιμή εξόφλησης της ομολογίας είναι C' ενώ η ονομαστική αξία της είναι C , το ονομαστικό επιτόκιο είναι i ενώ i' είναι το πραγματικό επιτόκιο προς το οποίο γίνεται η εξόφληση του δανείου, οπότε ισχύει η σχέση $C \times i = C' \times i'$



- Το τοκοχρεολύσιο δίνεται από τη σχέση

$$R = N \times C' \times i' + N \times C' \times P_{n|i'}$$
- Το χρεολύσιο της μ περιόδου δίνεται από τη σχέση

$$P_{\mu} = N \times C' \times P_{n|i'} \times (1+i')^{\mu-1}$$
- Οι ζώσεις ομολογίες στην αρχή της περιόδου $\mu+1$ δίνονται από τη σχέση

$$N_{\mu+1} = N - N \times P_{n|i'} \times S_{\mu|i'}$$
- Οι εξοφλημένες ομολογίες στο τέλος της περιόδου μ δίνονται από τη σχέση

$$Y_{\mu} = N \times P_{n|i'} \times (1+i')^{\mu-1}$$



Παράδειγμα

Να συνταχθεί πίνακας απόσβεσης για τα τρία πρώτα έτη ομολογιακού δανείου 400000 ομολογιών ονομαστικής αξίας 1000 EUR έκαστη. Η εξόφληση των ομολογιών γίνεται σε 5 έτη με ίσες ετήσιες εξαγορές και επιτόκιο 8%. **[Μέθοδος απόσβεσης ίσου αριθμού ομολογιών σε κάθε περίοδο]**

Λύση

Ακολουθούμε τη μέθοδο απόσβεσης με ίσα μέρη κεφαλαίου οπότε για να ολοκληρωθεί η εξόφληση των 400000 ομολογιών σε 5 έτη, θα πρέπει στο τέλος κάθε έτους να εξοφλούνται $400000/5=80000$ ομολογίες με αξία $80000 \times 1000 = 80000000$ EUR



Πίνακας Απόσβεσης για τα τρία πρώτα έτη

Έτος	Εξοφ. Ομ.	Ανεξ. Ομ.	Χρεολύσιο	Τόκος	Τοκοχρεολύσιο	Ανεξ. Υπόλοιπο
1	80000	400000	80000000	32000000	112000000	320000000
2	80000	320000	80000000	25600000	105600000	240000000
3	80000	240000	80000000	19200000	99200000	160000000



Εφαρμογή

Να συνταχθεί πίνακας απόσβεσης ομολογιακού δανείου 100000 ομολογιών ονομαστικής αξίας 2000 EUR έκαστη. Η εξόφληση των ομολογιών γίνεται σε 10 έτη με ίσες ετήσιες εξαγορές και επιτόκιο 5%.

Λύση

Σύμφωνα με τη μέθοδο απόσβεσης με ίσα μέρη κεφαλαίου για να ολοκληρωθεί η εξόφληση των 100000 ομολογιών σε 10 έτη θα πρέπει στο τέλος κάθε έτους να εξοφλούνται $100000/10=10000$ ομολογίες με αξία $10000 \times 2000 = 20000000$ EUR



Πίνακας Απόσβεσης

Έτος	Εξοφ. Ομ.	Ανεξ. Ομ.	Χρεολύσιο	Τόκος	Τοκοχρεολύσιο	Ανεξ. Υπόλοιπο
1	10000	100000	20000000	10000000	30000000	180000000
2	10000	90000	20000000	9000000	29000000	160000000
3	10000	80000	20000000	8000000	28000000	140000000
4	10000	70000	20000000	7000000	27000000	120000000
5	10000	60000	20000000	6000000	26000000	100000000
6	10000	50000	20000000	5000000	25000000	80000000
7	10000	40000	20000000	4000000	24000000	60000000
8	10000	30000	20000000	3000000	23000000	40000000
9	10000	20000	20000000	2000000	22000000	20000000
10	10000	10000	20000000	1000000	21000000	-



Βιβλιογραφία

- Οικονομικά Μαθηματικά, Μονοβασίλης Θ., Καλογηράτου Ζ., ΣΕΑΒ
- Οικονομικά Μαθηματικά, Κιόχος Α., Μπενέκη Χ., Κιόχος Π., Εκδόσεις Κιόχου
- Μαθηματικά Χρηματοπιστωτικής Ανάλυσης, Μασούρος Χ., Τσίτουρας Χ., Εκδόσεις Τσότρας



Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας

