

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών



ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ/ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

Στο σύνθετο τόκο (ανατοκισμό) στο τέλος κάθε περιόδου τόκος και κεφάλαιο προσθέτονται και το άθροισμα τοκίζεται σα νέο αρχικό κεφάλαιο. Στον απλό τόκο τοκίζεται μόνο το αρχικό κεφάλαιο.

Τα κεφάλαια που προκύπτουν με ανατοκισμό στο τέλος κάθε περιόδου ακολουθούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το αρχικό κεφάλαιο και λόγο τον όρο $1+i$.



Συμβολισμοί

K_0 : Αρχικό Κεφάλαιο ή Αρχική Αξία

K_n : Τελικό Κεφάλαιο ή Τελική Αξία

i : Επιτόκιο

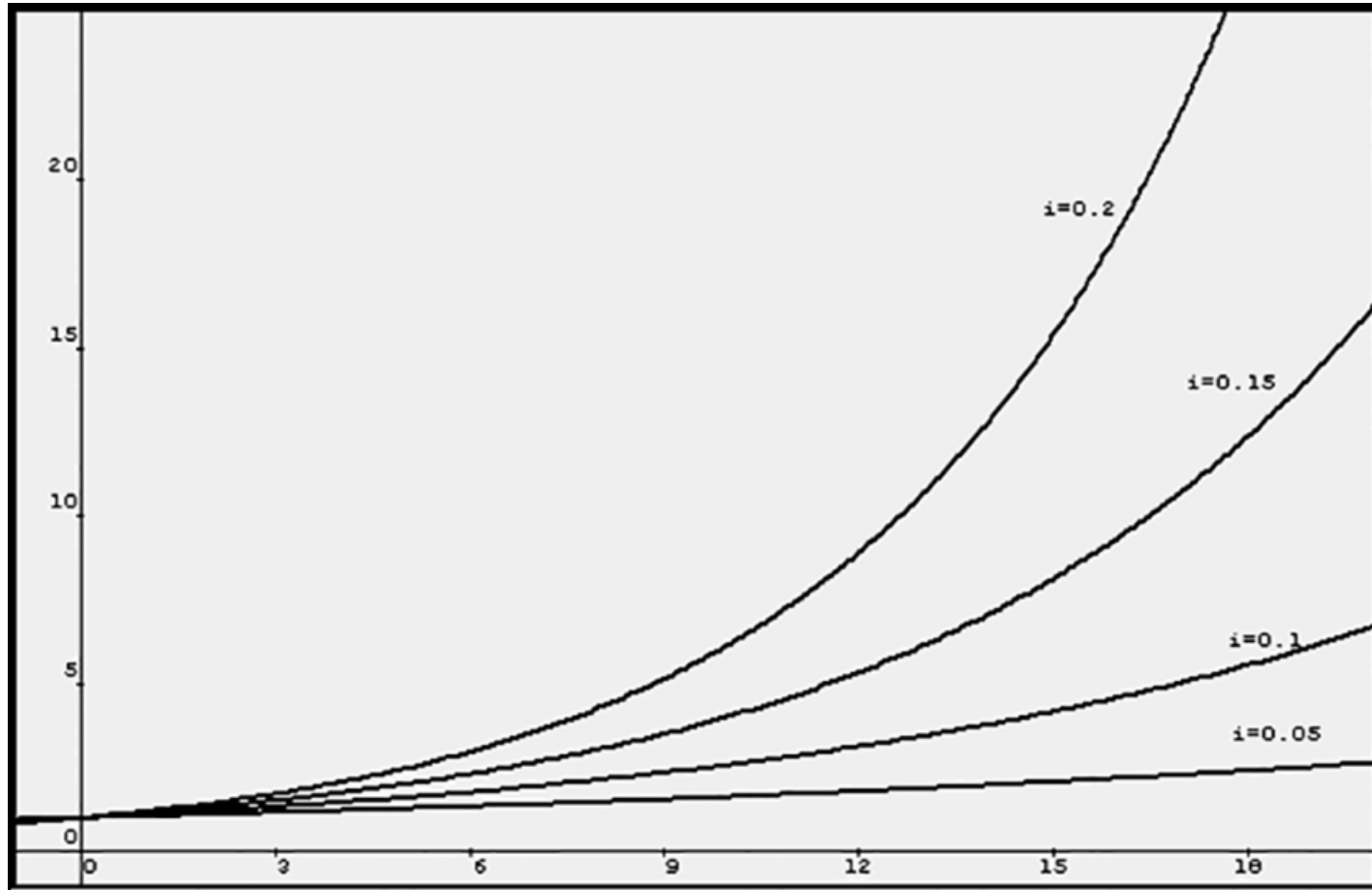
n ή μ/n : Χρόνος Τοκισμού (η περίοδος ανατοκισμού πρέπει να αντιστοιχεί σε αυτή του επιτοκίου)

$(1 + i)^n$: Συντελεστής Κεφαλαιοποίησης

$$K_n = K_0 \times (1 + i)^n$$



Συντελεστές Κεφαλαιοποίησης για διάφορα Κεφάλαια



Παράδειγμα

Κεφάλαιο €3.000 τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 12% για 35 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξουμε στο τέλος της κατάθεσης αν ο τοκισμός έγινε (i) με απλό τόκο (ii) με ετήσιο ανατοκισμό.

$$(i) K+I=K+Kni=3000+3000 \times 0.12 \times 35=15600$$

$$(ii) K_{35} = K_0 \times (1 + i)^{35} = 3000 \times (1 + 0,12)^{35} = \\ = 158358,8$$



Όταν ο χρόνος ανατοκισμού δεν είναι ακέραιος αλλά κλασματικός (πχ αν έχουμε ετήσιο ανατοκισμό με επιτόκιο 10% και το κεφάλαιο τοκίζεται για 2 χρόνια και 4 μήνες) τότε υπάρχουν δύο τρόποι υπολογισμού της τελικής αξίας.

- Γραμμική μέθοδος

Εφαρμόζουμε ανατοκισμό για τον ακέραιο αριθμό περιόδων και για το υπόλοιπο κλασματικό μέρος εφαρμόζεται ο απλός τόκος.

Η τελική αξία για τον ακέραιο αριθμό περιόδων δίνεται ως εξής: $K_n = K_0 \times (1 + i)^n$

Για το κλασματικό μέρος έχουμε:

$$K_{\mu/n} = \frac{K_n \times \mu \times i}{12} = \frac{K_0 \times (1 + i)^n \times \mu \times i}{12}$$



Άρα τελικά έχουμε:

$$K_{n+\frac{\mu}{n}} = \frac{K_0(1+i)^n(12+\mu i)}{12}$$

- Εκθετική Μέθοδος

Θεωρούμε ότι ο ανατοκισμός συνεχίζεται εκτός από τον ακέραιο αριθμό περιόδων και για κλάσμα της περιόδου.

$$\text{Άρα } K_{n+\frac{\mu}{n}} = K_0(1+i)^n(1+i)^{\frac{\mu}{n}} = K_0(1+i)^{n+\frac{\mu}{n}}$$



Παράδειγμα

Κεφάλαιο €10.000 τοποθετείται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 10% για 8 χρόνια και 6 μήνες. Να βρεθεί το ποσό που θα πάρουμε μετά το τέλος της κατάθεσης με τις δύο μεθόδους.

- Γραμμική Μέθοδος

$$K_{n+\frac{\mu}{n}} = \frac{K_0(1+i)^n(12+\mu i)}{12}$$

$$\text{Άρα } K_{8+\frac{6}{12}} = \frac{10000(1+0.1)^8(12+6 \times 0.1)}{12} = 22507.8$$



- Εκθετική Μέθοδος

$$K_{n+\frac{\mu}{n}} = K_0(1+i)^{n+\frac{\mu}{n}}$$

Άρα

$$\begin{aligned} K_{8+\frac{6}{12}} &= K_0(1+i)^{8+\frac{6}{12}} = 10000(1+0.1)^8(1+0.1)^{0.5} \\ &= 22482.08 \end{aligned}$$



Ασκήσεις

1. Κεφάλαιο €20.000 τοποθετείται με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 5% για 6 χρόνια και 9 μήνες. Να βρεθεί το ποσό που θα σχηματισθεί στο τέλος της κατάθεσης.

2. Τοκίσαμε €9.000 με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8% για 6 χρόνια. Για πόσο χρόνο πρέπει να τοκίσουμε το ίδιο κεφάλαιο με το ίδιο επιτόκιο στον απλό τόκο για να πάρουμε το ίδιο τελικό κεφάλαιο;



3. Καταθέσαμε σήμερα €10.000 με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 5% για 6 χρόνια και 8 μήνες. Αποσύρουμε τότε €6.500 και στη συνέχεια ο ανατοκισμός γίνεται ετήσιος, και το επιτόκιο ετήσιο και ίσο με 8%. Να βρεθεί το ποσό που θα σχηματισθεί μετά 15 χρόνια από σήμερα.

4. Κεφάλαιο κατατίθεται στον απλό τόκο με έτος μικτό για 120 μέρες με επιτόκιο 6%. Το συνολικό ποσό που δημιουργήθηκε, κατατέθηκε με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8% για 5 χρόνια. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας πήραμε συνολικά €5.245,5. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο κατάθεσης.



Βιβλιογραφία

- Οικονομικά Μαθηματικά, Μονοβασίλης Θ., Καλογηράτου Ζ., ΣΕΑΒ
- Μαθηματικά Χρηματοπιστωτικής Ανάλυσης, Μασούρος Χ., Τσίτουρας Χ., Εκδόσεις Τσότρας



Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας

