

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών



Ουρές Αναμονής

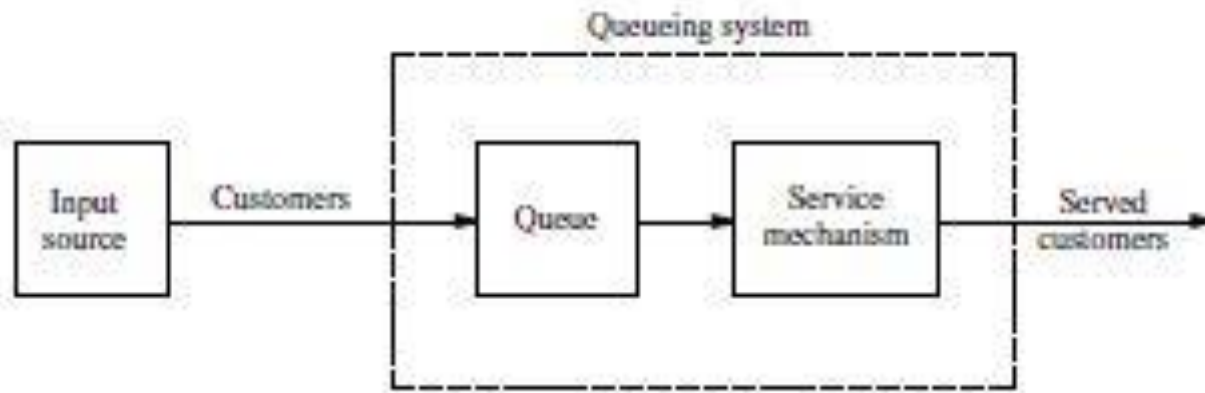
Η θεωρία Ουρών Αναμονής ασχολείται με τη μελέτη συστημάτων αναμονής και χρησιμοποιεί μοντέλα για την αναπαράσταση των διαφόρων τύπων συστημάτων που συμπεριλαμβάνουν το μέσο χρόνο αναμονής που θα προκύψει από τις συνθήκες του εκάστοτε συστήματος.

Παραδείγματα Συστημάτων Αναμονής

- Ουρά για αγορά εισιτηρίων
- Ουρά σε ταμεία τραπεζών/super market/ταχυδρομεία
- Ουρά σε συνεργείο για την επισκευή μηχανών
- Ουρά οχημάτων/φορτηγών/πλοίων για εκφόρτωση σε αποθήκη/λιμάνι
- Ουρά αεροπλάνων για απογείωση/προσγείωση σε αεροδιάδρομο

- Μελετάμε τα συστήματα αναμονής γιατί η αναμονή συνεπάγεται απώλεια χρόνου (απώλεια παραγωγής) άρα επηρεάζει την αποτελεσματικότητα μιας οικονομίας.
- Μεγάλη δυνατότητα εξυπηρέτησης σε ένα σύστημα αναμονής συνεπάγεται μεγάλο κόστος λειτουργίας.
- Μη επαρκής δυνατότητα εξυπηρέτησης οδηγεί σε υπερβολική αναμονή.
- Τα μοντέλα Ουρών Αναμονής δίνουν τη δυνατότητα εύρεσης της κατάλληλης ισορροπίας μεταξύ κόστους εξυπηρέτησης και χρόνου αναμονής.

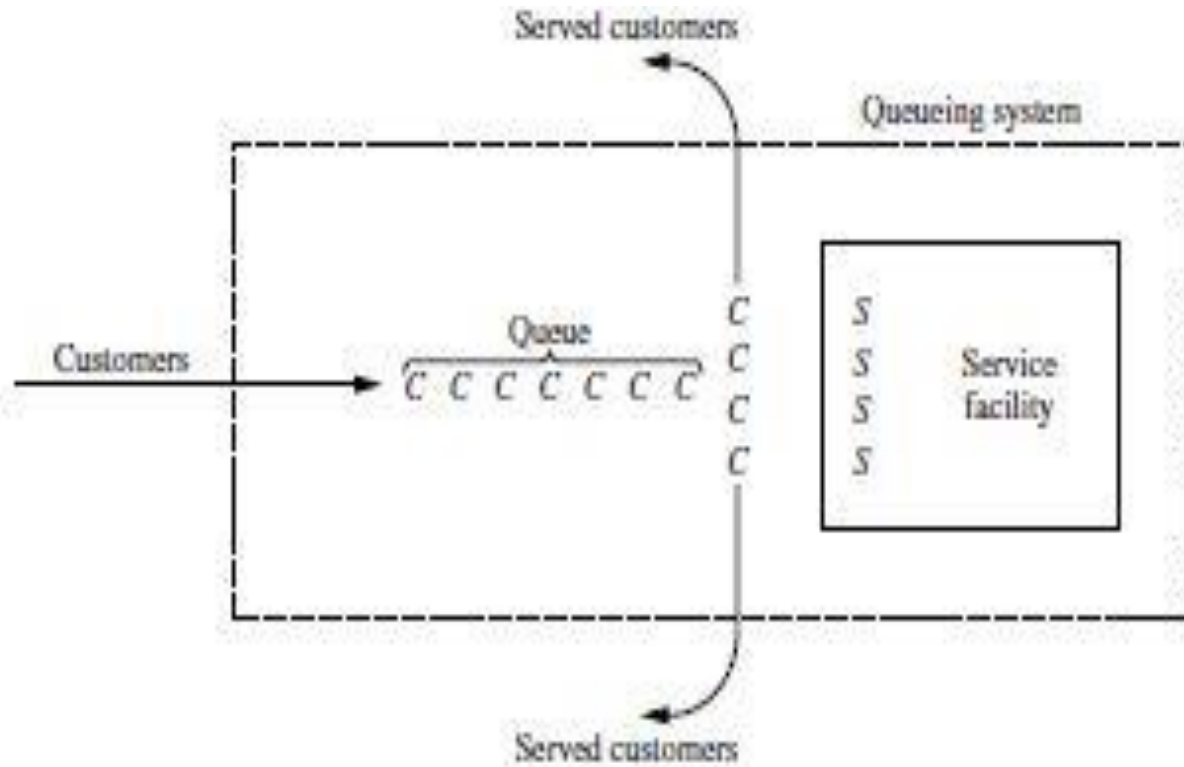
Βασική Διαδικασία



Πελάτες δημιουργούνται στην Πηγή Εισόδου, εισέρχονται στο σύστημα ουράς αναμονής, η εξυπηρέτηση δεν είναι άμεσα διαθέσιμη και πραγματοποιείται για τον πελάτη από το μηχανισμό εξυπηρέτησης μετά από κάποιο χρόνο, ο πελάτης αποχωρεί από το σύστημα μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης.

- Η Πηγή Εισόδου έχει ως βασικό χαρακτηριστικό το μέγεθος δηλαδή το συνολικό αριθμό πελατών που μπορούν να ζητήσουν εξυπηρέτηση. Μπορεί να είναι άπειρο ή πεπερασμένο (δύσκολα μοντέλα ως προς τους υπολογισμούς).
- Υπόθεση: Άπειρο πλήθος πελατών.
- Υπόθεση: Οι πελάτες που παράγονται ακολουθούν την κατανομή Poisson (οι αφίξεις στο σύστημα συμβαίνουν τυχαία αλλά με ένα ορισμένο σταθερό μέσο ρυθμό ανεξάρτητα από τον αριθμό των πελατών που ήδη υπάρχουν στο σύστημα).
- Ισοδύναμη Υπόθεση: Η κατανομή πιθανότητας του χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι η εκθετική.
- Η Ουρά εκφράζει το σημείο στο οποίο οι πελάτες περιμένουν πριν την εξυπηρέτηση και χαρακτηρίζεται από το μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό πελατών που μπορεί να περιέχει. Συνήθης υπόθεση η άπειρη ουρά.

- Πειθαρχία του συστήματος: Συνήθως ακολουθείται η αρχή first-come-first-served (αν όχι θα πρέπει να προσδιορίζεται στο πρόβλημα).
- Μηχανισμός εξυπηρέτησης: Αποτελείται από ένα ή περισσότερους εξυπηρετητές. Ο χρόνος μεταξύ έναρξης και ολοκλήρωσης της εξυπηρέτησης λέγεται χρόνος εξυπηρέτησης. Χρειάζεται να καθορίσουμε τη στατιστική κατανομή που ακολουθεί ο χρόνος εξυπηρέτησης σε κάθε εξυπηρετητή. Συνήθως υποθέτουμε την ίδια κατανομή για όλους τους εξυπηρετητές (πχ εκθετική, εκφυλισμένη, Erlang, κτλ).



Συνήθως υποθέτουμε ότι οι χρόνοι μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι και όμοια κατανομημένοι

$\frac{\lambda}{\mu}$

Κατανομή χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων/Κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης/
Αριθμός εξυπηρετητών

ΟΡΟΛΟΓΙΑ/ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΜΕΓΕΘΗ

Κατάσταση του συστήματος = ο αριθμός πελατών στο σύστημα της ουράς

Μήκος ουράς = ο αριθμός των πελατών που αναμένουν την έναρξη εξυπηρέτησης

$N(t)$ = ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t

$P_n(t)$ = η πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς n πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή t , δοθέντος ενός αριθμού τη στιγμή 0

s = ο αριθμός εξυπηρετητών

λ_n = μέσος αριθμός αφίξεων νέων πελατών όταν n πελάτες βρίσκονται στο σύστημα

μ_n = μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης του **συνολικού** συστήματος όταν n πελάτες βρίσκονται στο σύστημα

Όταν λ_n και μ_n είναι σταθερά για όλα τα n τότε $\lambda_n = \lambda$ και $\mu_n = s\mu$ άρα ο αναμενόμενος χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι $1/\lambda$ και ο αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης $1/\mu$, ενώ ο συντελεστής απασχόλησης (utilization factor) της διαδικασίας εξυπηρέτησης είναι

$$\rho = \lambda/(s\mu)$$

Στη συνθήκη στάσιμης κατάστασης

P_n = η πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς n πελάτες στο σύστημα αναμονής

L = ο αναμενόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα αναμονής = $\sum_{n=0}^{\infty} nP_n$

L_q = το αναμενόμενο μήκος της ουράς εκτός των πελατών που εξυπηρετούνται = $\sum_{n=s}^{\infty} (n - s)P_n$

W = ο χρόνος αναμονής στο σύστημα συμπεριλαμβανομένου του χρόνου εξυπηρέτησης για κάθε πελάτη

W_q = ο χρόνος αναμονής στην ουρά (εκτός του χρόνου εξυπηρέτησης) για κάθε πελάτη

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

$$W = W_q + 1/\mu$$

Στο σύστημα $M/M/s$ υπάρχουν s εξυπηρετητές και οι χρόνοι εξυπηρέτησης και μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή (M).

Παράδειγμα

Σε ένα περιφερειακό νοσοκομείο η διοίκηση θέλει να αποφασίσει αν θα απασχολήσει ένα ή δύο ιατρούς στο τμήμα έκτακτης ανάγκης. Τα στατιστικά δείχνουν ότι οι περιπτώσεις έκτακτης ανάγκης φθάνουν τυχαία (διαδικασία Poisson) έτσι ώστε οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων να ακολουθούν εκθετική κατανομή ενώ ο χρόνος που δαπανά ο ιατρός για την αντιμετώπιση του συμβάντος ακολουθεί επίσης κατά προσέγγιση την εκθετική κατανομή. Άρα το συγκεκριμένο σύστημα αναμονής περιγράφεται από το μοντέλο $M/M/s$ και μελετάται για $s=1$ και $s=2$. Τα διαθέσιμα δεδομένα δείχνουν ότι οι ασθενείς φθάνουν με ρυθμό 2 ασθενείς ανά ώρα ενώ ο ιατρός χρειάζεται περίπου 20 λεπτά ανά ασθενή.

Επομένως έχουμε:

$\lambda=2$ ασθενείς ανά ώρα (άφιξη) και $1/\lambda=1/2$ ώρες ανά ασθενή

$\mu=3$ ασθενείς ανά ώρα (εξυπηρέτηση) και $1/\mu=1/3$

$$\rho=\lambda/(s\mu) < 1$$

Με την εφαρμογή των κατάλληλων τύπων καταλήγουμε στον επόμενο πίνακα

	$s = 1$	$s = 2$
ρ	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
P_0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
P_1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
P_n for $n \geq 2$	$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$
L_q	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{12}$
L	2	$\frac{3}{4}$
W_q	$\frac{2}{3}$ hour	$\frac{1}{24}$ hour
W	1 hour	$\frac{3}{8}$ hour
$P\{W_q > 0\}$	0.667	0.167
$P\left\{W_q > \frac{1}{2}\right\}$	0.404	0.022
$P\{W_q > 1\}$	0.245	0.003
$P\{W_q > t\}$	$\frac{2}{3}e^{-t}$	$\frac{1}{6}e^{-4t}$
$P\{W > t\}$	e^{-t}	$\frac{1}{2}e^{-3t}(3 - e^{-t})$

Τελικά λοιπόν κρίνεται ότι ένας μόνο ιατρός δεν επαρκεί για τα standards του νοσοκομείου.

Βιβλιογραφία

- Introduction to Operations Research, Hillier and Lieberman, 2007
- ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΛΗΨΗΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ, ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΥΨΗΛΑΝΤΗΣ, 2015



Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας

