ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Προβλήματα με ρεαλιστικές εφαρμογές

Το Πρόβλημα Προγραμματισμού Βάρδιας
(The Shift Scheduling Problem)
Ακέραιος Προγραμματισμός

Το Πρόβλημα Δρομολόγησης Οχημάτων
(The Vehicle Routing Problem)
Μεικτός Ακέραιος Προγραμματισμός

Το Πρόβλημα Προγραμματισμού Βάρδιας

Προσδιορισμός του ελάχιστου αριθμού εργαζομένων (ή του αριθμού εργαζομένων με το ελάχιστο συνολικό κόστος) και κατανομή τους σε συγκεκριμένες βάρδιες έτσι ώστε να ικανοποιείται απαίτηση που μεταβάλλεται χρονικά.

Εφαρμογή σε νοσοκομειακό προσωπικό, ξενοδοχειακό προσωπικό, υπηρεσίες φύλαξης, υπάλληλοι διοδίων, πληρώματα καμπίνας, οδηγοί λεωφορείων, κτλ.

Ο συγκεκριμένος τύπος προβλημάτων μοντελοποιείται ως πρόβλημα κάλυψης συνόλου (Set Covering Problem) δηλαδή

$$\min z = \sum_{t \in T} c_t x_t,$$

subject to

$$\sum_{t \in T} a_{tp} x_t \geq r_p \quad \text{for} \quad p \in P,$$

$$x_t \in \mathbb{N} \quad \text{for} \quad t \in T,$$

P the set of indices associated with planning periods,
T the set of indices associated with allowable shifts (tours),

a_{tp} $\begin{cases} 1, & \text{if period } p \text{ is a working period for shift (tour) } t, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$

c_t the cost of having an employee work shift (tour) t,
r_p the desired staffing level in period p,
x_t the number of employees working shift (tour) t.

Εφαρμογή

Η εταιρεία φύλαξης ενός τοπικού αεροδρομίου έχει καταλήξει ότι χρειάζεται προσωπικό σύμφωνα με το παρακάτω χρονοδιάγραμμα.

24-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
11	11	13	14	15	13	14	15	15	16	14	16
12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
16	17	21	22	24	20	19	16	15	12	12	10

Αν οι υπάλληλοι φύλαξης εργάζονται σε οκτάωρες βάρδιες ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός εργαζομένων που πρέπει να απασχολήσει η εταιρεία; Πώς μετασχηματίζεται το πρόβλημα αν υπάρχει η δυνατότητα απασχόλησης και σε εξάωρες βάρδιες;

Αν το κόστος εργασίας δίνεται από τον παρακάτω πίνακα πως μετασχηματίζεται το πρόβλημα σε περίπτωση που η εταιρεία επιδιώξει να ελαχιστοποιήσει το κόστος εργασίας;

24-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
11	11	13	14	15	13	14	15	15	16	14	16
3.6	3.7	3.8	3.8	3.7	3.7	3.1	2.5	2	2	2	2
12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
16	17	21	22	24	20	19	16	15	12	12	10
1.7	1.7	2	2.2	2.3	2.3	2.5	2.5	2.7	2.8	3.1	3.2

Επίλυση

Έστω x_i ο αριθμός υπαλλήλων που ξεκινά να εργάζεται την ώρα *i* σε οκτάωρη βάρδια οπότε έχω το μοντέλο ακέραιου προγραμματισμού

$$min \sum_{i=1,\dots,24} x_i$$
$$s.t. x_1 \geq d_1$$
$$x_1 + x_2 \geq d_2$$
$$\dots$$
$$x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq d_{24}$$
$$x_i \in \mathbb{N} \ \forall i = 1,2,\dots,24$$

Έστω x_i ο αριθμός υπαλλήλων που ξεκινά να εργάζεται την ώρα i σε οκτάωρη βάρδια και y_i ο αριθμός των υπαλλήλων που ξεκινά να εργάζεται την ώρα i σε εξάωρη βάρδια, οπότε το μοντέλο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$min \sum_{i=1,\dots,24} x_i + y_i$$

$$s.t.\, x_1 + y_1 \geq d_1$$

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \geq d_2$$

$$\dots$$

$$x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} \geq d_{24}$$

$$x_i, y_i \in \mathbb{N}\ \forall i = 1,2,\dots,24$$

Αν λάβουμε υπόψη το κόστος της κάθε βάρδιας τότε ελαχιστοποιούμε το συνολικό κόστος λειτουργίας αντί του αριθμού των εργαζομένων, οπότε το μοντέλο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$min \sum_{i=1,\dots,24} c_i x_i + c_i y_i$$
$$s.t.\, x_1 + y_1 \geq d_1$$
$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \geq d_2$$
$$\dots$$
$$x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} \geq d_{24}$$
$$x_i, y_i \in \mathbb{N}\ \forall i = 1,2,\dots,24$$

Το Πρόβλημα Δρομολόγησης Οχημάτων

Δίνονται n πελάτες με συγκεκριμένη γεωγραφική θέση και ζήτηση προϊόντος ο καθένας. Οι πελάτες πρέπει να εξυπηρετηθούν από ένα στόλο k όμοιων οχημάτων συγκεκριμένης χωρητικότητας που βρίσκονται σταθμευμένα σε ένα ή περισσότερους σταθμούς. Τα οχήματα πρέπει να επιστρέψουν στον/στους σταθμούς με το τέλος του δρομολογίου. Να προσδιοριστεί το σύνολο των δρομολογίων που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος εξυπηρέτησης όλων των πελατών.

Εφαρμογή σε προβλήματα διαχείρισης στόλου οχημάτων, υπηρεσίες 3PL και διανομών, picking/φόρτωση παλέτας, κτλ.

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Sets

- $N = \{1,2,\ldots,n\}$ *set of customers*
- $V = N \cup \{0\}$ *set of nodes on the network*
- $S = \{1,2,\ldots m\}$ *set of identical vehicles*

Variables

- $z_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{if vehicle } k \text{ drives directly from customer } i \text{ to customer } j \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$
- $r_{ik} =$ the time at which vehicle k has finished servicing customer i

Parameters

- $d_{ij} =$ Euclidean distance between customers i and j $= ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2}$
- $x_i = x$ coordinate of customer i on the plane
- $y_i = y$ coordinate of customer i on the plane
- $t_i =$ service time at customer i

$$\min \{\alpha \sum_{k\in S} \sum_{i\in V} \sum_{J\in V} d_{ij}\, z_{ijk} + \beta(m - \sum_{k\in S} \sum_{i\in V} \sum_{j\in V} z_{ijk})\}$$

s.t.

$$\sum_{k\in S} \sum_{i\in V} z_{ijk} \le 1 \;\; \forall\, j \in V \; (1)$$

$$\sum_{j\in V} x_{0jk} = 1 \;\; \forall\, k \in S \; (2)$$

$$\sum_{i\in V} z_{ihk} - \sum_{j\in V} z_{hjk} = 0 \;\; \forall\, h \in N \; and \; \forall\, k \in S \; (3)$$

$$\sum_{i\in V} z_{i0k} = 1 \;\; \forall\, k \in S \; (4)$$

$$r_{ik} + d_{ij} + t_j - M_{ij}\left(1 - z_{ijk}\right) \le r_{jk} \;\; \forall\, j \in N, \forall\, i \in V \; and \; \forall\, k \in S \; (5)$$

$$\Xi_i \le r_{ik} - t_i \le \Psi_i \;\; \forall\, i \in V \; and \; \forall\, k \in S \; (6)$$

$$r_{ik} + d_{i0} - M_{i0}(1 - z_{i0k}) \le \Psi_0 \;\; \forall\, i \in N \; and \; \forall\, k \in S \; (7)$$

$$r_{0k} = \Xi_0 \;\; \forall\, k \in S \; (8)$$

$$z_{iik} = 0 \;\; \forall\, i \in N \; and \; \forall\, k \in S \; (9)$$

$$\sum_{k\in S}(1 - z_{00k}) \leq m \; (10)$$

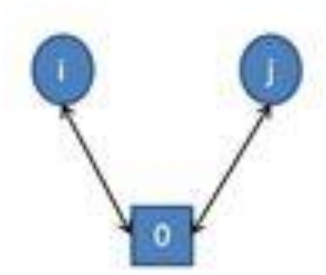
$$z_{ijk} \in \{0,1\} \; \forall\, i, j \in V \; and \; \forall\, k \in S \; (11)$$

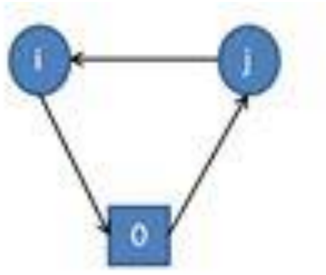
$$r_{ik} \;\; \geq 0 \;\; \forall\, i \in V \; and \; \forall\, k \in S \; (12)$$

Επίλυση

Αλγόριθμος Clarke-Wright (Savings Heuristic)

- Ξεκινώ από την ακριβότερη λύση εξυπηρετώντας κάθε πελάτη με δικό του αποκλειστικά δρομολόγιο
- Για κάθε ζεύγος πελατών αντικαθιστώ τα δύο δρομολόγια με ένα που συνδέει τους δύο πελάτες με τη βάση των οχημάτων εφόσον δεν παραβιάζονται περιορισμοί χρονικών παραθύρων, χωρητικότητας οχημάτων, κτλ





Η συνολική απόσταση των δύο αρχικών δρομολογίων είναι

$$2 \times D_{0i} + 2 \times D_{0j}$$

Η συνολική απόσταση του τελικού δρομολογίου είναι

$$D_{0j} + D_{ji} + D_{0i}$$

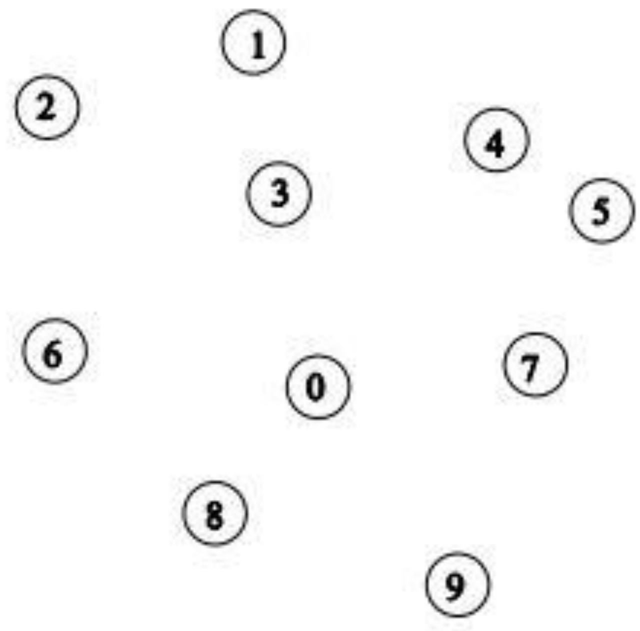
Άρα η εξοικονόμηση είναι

$$D_{0j} + D_{0i} - D_{ji} \geq 0$$

- Ξεκινώ τη δρομολόγηση από το ζεύγος πελατών με τη μεγαλύτερη εξοικονόμηση
- Εισάγω νέους πελάτες στις «άκρες» του δρομολογίου και μόνο αν δεν παραβιάζονται περιορισμοί χρόνου και χωρητικότητας
- Αν δεν μπορούν να εισαχθούν πλέον πελάτες, ξεκινώ νέο δρομολόγιο από το ζεύγος με τη μεγαλύτερη εξοικονόμηση που απομένει και συνεχίζω μέχρι να εξυπηρετήσω όλους τους πελάτες

Εφαρμογή

Το παρακάτω χάρτης απεικονίζει τη βάση οχημάτων (0) και τους πελάτες (1 έως 9) που πρέπει να εξυπηρετηθούν ενώ οι αποστάσεις των σημείων δίνονται στον Πίνακα 1.



Πίνακας 1

c_{ij}	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	-	12	11	7	10	10	9	8	6	12
1	12	-	8	5	9	12	14	16	17	22
2	11	8	-	9	15	17	8	18	14	22
3	7	5	9	-	7	9	11	12	12	17
4	10	9	15	7	-	3	17	7	15	18
5	10	12	17	9	3	-	18	6	15	15
6	9	14	8	11	17	18	-	16	8	16
7	8	16	18	12	7	6	16	-	11	11
8	6	17	14	12	15	15	8	11	-	10
9	12	22	22	17	18	15	16	11	10	-

Η ζήτηση του κάθε πελάτη παρουσιάζεται στον Πίνακα 2 και η χωρητικότητα του κάθε οχήματος είναι K=40 μονάδες. Να βρεθεί η δρομολόγηση με το ελάχιστο κόστος.

Πίνακας 2

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\mathbf{d_i}$	10	15	18	17	3	5	9	4	6

Επίλυση

Υπολογίζω τις εξοικονομήσεις και σχηματίζω το σχετικό πίνακα

s_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		15	14	13	10	7	4	1	2
2			9	6	4	12	1	3	1
3				10	8	5	3	1	2
4					17	2	11	1	4
5						1	12	1	7
6							1	7	5
7								3	9
8									8

Διατάσω τα ζεύγη σε φθίνουσα σειρά ως προς την εξοικονόμηση.

[4,5], [1,2], [1,3], [1,4], [2,6], [5,7], [4,7], [1,5], [3,4], [2,3], [7,9], [3,5], [8,9], [1,6], [5,9], [6,8], [2,4], ...

Αρχική Λύση: 0-1-0, 0-2-0, ... , 0-9-0

Ένωση [4,5]: Ενώνω τα δρομολόγια 0-4-0 και 0-5-0 οπότε έχω 0-4-5-0 με φορτίο $d4 + d5 = 20 < K$

Ένωση [1,2]: Ενώνω τα δρομολόγια 0-1-0 και 0-2-0 οπότε έχω 0-1-2-0 με φορτίο $d1 + d2 = 25 < K$

Ένωση [1,3]: Περιορισμός χωρητικότητας $d1+d2 +d3 = 43 > K$

Ένωση [1,4]: Περιορισμός χωρητικότητας $d1 +d2 +d4 = 42 > K$

Ένωση [2,6]: Ενώνω τα δρομολόγια 0-1-2-0 και 0-6-0 οπότε έχω 0-1-2-6-0 με συνολικό φορτίο d1+d2+d6 = 30 < K

Ένωση [5,7]: Ενώνω τα δρομολόγια 0-4-5-0 και 0-7-0 οπότε έχω 0-4-5-7-0 με συνολικό φορτίο d4+d5+d7 = 29 < K

Ένωση [4,7]: Οι πελάτες 4 και 7 έχουν μπει στο ίδιο δρομολόγιο

Ένωση [1,5]: Ο πελάτης 5 εξυπηρετείται σε άλλο δρομολόγιο (εσωτερική κορυφή).

Ένωση [3,4]: Περιορισμός χωρητικότητας d3+d4+d5+d7 = 47 > K

Ένωση [2,3]: Ο πελάτης 2 εξυπηρετείται σε άλλο δρομολόγιο (εσωτερική κορυφή).

Ένωση [7,9]: Ενώνω τα δρομολόγια 0-4-5-7-0 και 0-9-0 οπότε έχω 0-4-5-7-9-0 με συνολικό φορτίο d4+d5+d7+d9 = 35 < K

Ένωση [3,5]: Ο πελάτης 5 εξυπηρετείται σε άλλο δρομολόγιο (εσωτερική κορυφή).

Ένωση [8,9]: Ενώνω τα δρομολόγια 0-4-5-7-9-0 και 0-8-0 οπότε έχω 0-4-5-7-9-8-0 με συνολικό φορτίο $d4+d5+d7+d9+d8 = 39 < K$

Ένωση [1,6]: Οι πελάτες 1 και 6 έχουν μπει στο ίδιο δρομολόγιο

Ένωση [5,9]: Οι πελάτες 5 και 9 έχουν μπει στο ίδιο δρομολόγιο

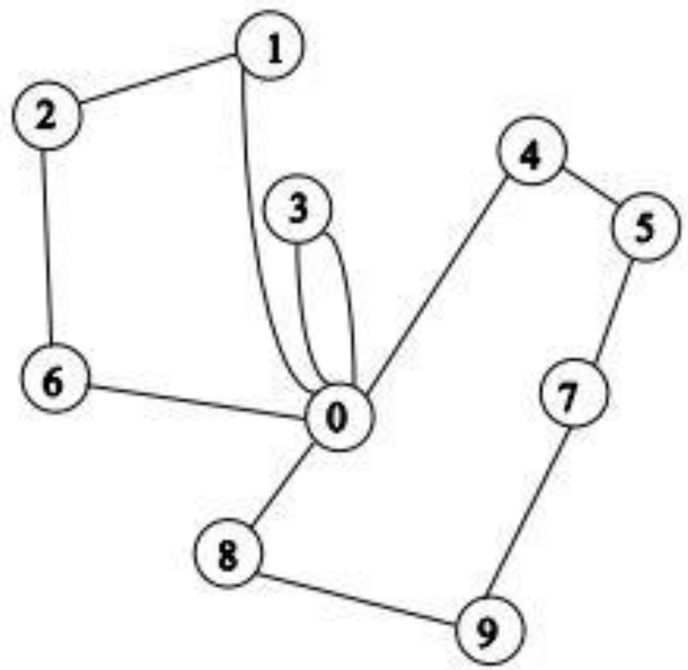
Ένωση [6,8]: Όριο χωρητικότητας

$(d1+d2+d6)+(d4+d5+d7+d9+d8) = 69 > K$

Αποτέλεσμα: τρία δρομολόγια που δεν μπορούν να ενωθούν λόγω περιορισμών χωρητικότητας των οχημάτων.

Τελική λύση

Δρομολόγιο	Φορτίο	Κόστος
0-3-0	18	14
0-1-2-6-0	30	37
0-4-5-7-8-9-0	39	46
Συνολικό Κόστος		97



Βιβλιογραφία

- Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα Θεωρία και Ασκήσεις, Φακίνος και Οικονόμου, 2003
- Introduction to Operations Research, Hillier and Lieberman, 2007

Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας