ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κλασσικά Προβλήματα Αναφοράς

Το Πρόβλημα της Ανάθεσης
(Assignment Problem)

Το Πρόβλημα του Σακιδίου
(Knapsack Problem)

Το Πρόβλημα της Μεταφοράς
(Transportation Problem)

Το Πρόβλημα της Ανάθεσης

Υπάρχουν m άτομα A_1, A_2, … , A_m τα οποία χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση m εργασιών B_1, B_2, … , B_m έτσι ώστε κάθε εργασία να εκτελείται από ένα άτομο και κάθε άτομο να εκτελεί μία εργασία. Έστω c_{ij} (i,j=1, 2, … , m) η απόδοση του ατόμου A_i στην εργασία B_j. Πώς πρέπει να κατανεμηθούν τα άτομα στις εργασίες για να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση;

Μαθηματική Μοντελοποίηση
πρόγραμμα ακέραιου προγραμματισμού

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ \tau o\ \tau o\mu o\ A_i\ \chi\rho\eta\sigma\iota\mu o\pi o\iota\varepsilon\iota\tau\alpha\iota\ \sigma\tau\eta\nu\ \varepsilon\rho\gamma\alpha\sigma\iota\alpha\ B_j \\ 0, \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

$$\max \sum_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1,\dots,m} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.\ \ \sum_{j=1,\dots,m} x_{ij} = 1, \forall\ i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1,\dots,m} x_{ij} = 1, \forall\ j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} = 1\ \eta\ 0\ \forall\ i, j = 1,2, \dots, m$$

Μέθοδοι Επίλυσης

Ουγγρικός Αλγόριθμος

1. Αφαιρούμε το μεγαλύτερο στοιχείο κάθε γραμμής από κάθε στοιχείο της αντίστοιχης γραμμής. Στο νέο πίνακα αφαιρούμε το μεγαλύτερο στοιχείο της κάθε στήλης από κάθε στοιχείο της αντίστοιχης στήλης
2. Με τον ελάχιστο αριθμό r ευθειών (οριζόντιων και κάθετων) διαγράφουμε τα 0 του τελευταίου πίνακα
3. Αν m=r τότε ο αντίστοιχος πίνακας δίνει την άριστη λύση. Αν m>r τότε προχωρούμε στο επόμενο βήμα
4. Αφαιρούμε το μεγαλύτερο μη διαγεγραμμένο στοιχείο από κάθε μη διαγεγραμμένο στοιχείο και το προσθέτουμε στο στοιχείο που βρίσκεται στη διασταύρωση των δύο ευθειών
5. Επιστρέφουμε στ βήμα 2

Ουγγρικός Αλγόριθμος-Εφαρμογή

Η απόδοση 3 υποψηφίων για 3 θέσεις δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 52 & 76 \\ 42 & 36 & 80 \\ 55 & 48 & 60 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Πώς πρέπει να κατανεμηθούν οι υποψήφιοι στις θέσεις ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση;

Ουγγρικός Αλγόριθμος-Εφαρμογή

$$\begin{bmatrix} 30 & 52 & 76 \\ 42 & 36 & 80 \\ 55 & 48 & 60 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -46 & -24 & 0 \\ -38 & -44 & 0 \\ -5 & -12 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -41 & -12 & 0 \\ -33 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχω r=2<3=m άρα ο τελευταίος πίνακας δεν δίνει την άριστη λύση.

$$\begin{bmatrix} -41 & -12 & 0 \\ -33 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -29 & 0 & 0 \\ -21 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Τώρα έχω r=3=m άρα έχω άριστη λύση στα ανεξάρτητα 0, δηλαδή $x_{12}=1$, $x_{23}=1$, $x_{31}=1$ με συνολική απόδοση R=52+80+55=187

Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

Έστω m σταθμοί παραγωγής A_1, A_2, … ,A_m ενός προϊόντος, $α_1$, $α_2$, … ,$α_m$ οι αντίστοιχες ποσότητες και n σταθμοί παράδοσης B_1, B_2, … ,B_n που απαιτούν ποσότητες b_1, b_2, … ,b_n αντίστοιχα. Η συνολική παραγωγή ισούται με τη συνολική ζήτηση δηλαδή $\sum_{i=1,\dots,m} a_i = \sum_{j=1,\dots,n} b_j = S$. Το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από το σταθμό παραγωγής A_i στο σταθμό παράδοσης B_j είναι c_{ij} με i=1,2,…,m και j=1,2,…,n. Να βρεθεί το βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς δηλαδή να βρεθούν οι ποσότητες x_{ij} που πρέπει να μεταφερθούν από τους σταθμούς παραγωγής στους σταθμούς παράδοσης έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς ενώ ικανοποιούνται οι ανάγκες των σταθμών παράδοσης.

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Έστω x_{ij} η ποσότητα προϊόντος που μεταφέρεται από το σταθμό παραγωγής A_i στο σταθμό παράδοσης B_j.

$$min \sum_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1,\ldots,n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \sum_{j=1,\ldots,n} x_{ij} = a_i \; \gamma\iota\alpha \; i = 1,2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1,\ldots,m} x_{ij} = b_j \; \gamma\iota\alpha \; j = 1,2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \; \gamma\iota\alpha \; i = 1,2, \ldots, m \; \kappa\alpha\iota \; j = 1,2, \ldots, n$$

Μέθοδοι Επίλυσης
Η προσεγγιστική μέθοδος του Vogel

1. Σχηματίζουμε το σχετικό πίνακα λαμβάνοντας υπόψη τα κόστη μεταφοράς, τη ζήτηση κάθε σταθμού παράδοσης και τη δυνατότητα παραγωγής (προσφορά) κάθε σταθμού παραγωγής
2. Υπολογίζουμε το penalty για κάθε γραμμή και κάθε στήλη υπολογίζοντας τη διαφορά ανάμεσα στα δύο μικρότερα κόστη της γραμμής/στήλης.
3. Βρίσκουμε τη γραμμή/στήλη με το μεγαλύτερο penalty και μεταφέρουμε όσο το δυνατό μεγαλύτερη ποσότητα στη μεταβλητή με το χαμηλότερο μοναδιαίο κόστος στη γραμμή/στήλη που έχουμε επιλέξει. Υπολογίζουμε εκ νέου προσφορά και ζήτηση και διαγράφουμε τη γραμμή/στήλη που η ζήτηση έχει καλυφθεί. Αν η ζήτηση καλύπτεται ταυτόχρονα σε γραμμή και στήλη διαγράφουμε μία από τις δύο και αποδίδουμε μηδενική ζήτηση/προσφορά στα κελιά που απομένουν.

4. Αν απομένει ακριβώς μία γραμμή/στήλη με προσφορά/ζήτηση 0 τότε έχουμε βρει τη λύση και ο αλγόριθμος τερματίζει.

   Αν υπάρχει γραμμή/στήλη με θετική προσφορά/ζήτηση τότε μεταφέρω τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα στη μεταβλητή με το μικρότερο κόστος.

   Αν όλες οι γραμμές/στήλες που δεν έχουν διαγραφεί έχουν μηδενική προσφορά/ζήτηση τότε βρίσκω τις μηδενικές βασικές μεταβλητές μεταφέροντας τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα στη μεταβλητή μικρότερου κόστους.

   Σε κάθε άλλη περίπτωση επανέρχομαι στο βήμα 2.

Η προσεγγιστική μέθοδος του Vogel-Εφαρμογή

Θεωρήστε ένα πρόβλημα μεταφοράς που περιλαμβάνει 3 σταθμούς παραγωγής (silos) και 4 σταθμούς παράδοσης (mills). Οι τιμές στην άνω δεξιά γωνιά κάθε κελιού αντιστοιχούν στο κόστος μεταφοράς ανά μονάδα από το σιλό *i* στο μύλο *j.*

		MILL				
		1	2	3	5	
SILO	1	10 x11	2 x12	20 x13	11 x14	**15**
	2	12 x21	7 x22	9 x23	20 x24	**25**
	3	4 x31	14 x32	16 x33	18 x34	**10**
		5	**15**	**15**	**15**	**SUPPLY**
		DEMAND				

Να βρεθεί ο βέλτιστος τρόπος να ικανοποιηθεί η ζήτηση των μύλων.

ΛΥΣΗ

Αρχικά υπολογίζω τα penalty για κάθε γραμμή και στήλη

		MILL					
		1	2	3	5		
SILO	1	10	2	20	11	15	10 - 2 = **8**
	2	12	7	9	20	25	9 - 7 = **2**
	3	4	14	16	18	10	14 - 4 = **10**
		5	15	15	15		
		10 - 4 = **6**	7 - 2 = **5**	16 - 9 = **7**	18 - 11 = **7**		

Η γραμμή 3 έχει το μεγαλύτερο penalty (10) και το κελί που αντιστοιχεί το χαμηλότερο κόστος ανά μονάδα είναι το x_{31} οπότε $x_{31}=5$ άρα η στήλη 1 διαγράφεται και υπολογίζουμε τα νέα penalty ως εξής:

Το μεγαλύτερο penalty είναι 9 (11-2), που αντιστοιχεί στη γραμμή 1. Οπότε $x_{12}=15$ και ικανοποιείται η ζήτηση ταυτόχρονα στη γραμμή 1 και στη στήλη 2. Η στήλη 2 διαγράφεται και η προσφορά στη γραμμή 1 γίνεται 0.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο η γραμμή 2 τώρα έχει το μεγαλύτερο penalty που είναι 11 (20-9), οπότε $x_{23}=15$ και η στήλη 3 διαγράφεται οπότε απομένουν 10 μονάδες στη γραμμή 2.

Μόνο η στήλη 4 απομένει και έχει 15 μονάδες. Μεταφέροντας ποσότητες με βάση το μικρότερο κόστος έχουμε $x_{14}=0$, $x_{34}=5$, $x_{24}=10$.

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$Z=15(2)+0(11)+15(9)+10(20)+5(4)+5(18)=475$

Το Πρόβλημα του Σακιδίου

Έστω σακίδιο που μπορεί να χωρέσει αντικείμενα συνολικού βάρους B. Μπορούμε να διαλέξουμε ανάμεσα σε ένα πλήθος N αντικειμένων κάθε ένα από τα οποία έχει βάρος B_i και αξία C_i και θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνολική αξία των αντικειμένων που χωρούν στο σακίδιο.

Μαθηματική Μοντελοποίηση

$x_i = ο\ αριθμός\ αντικειμενων\ i\ που\ τοποθετούνται\ στο\ σακιδιο$

$$\max \sum_{i=1,\dots,N} c_i x_i$$

$$s.t. \sum_{i=1,\dots,N} B_i x_i \leq B$$
$$x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{Z}^+$$

Μέθοδοι Επίλυσης

Ευρεσικές Μέθοδοι και Δυναμικός Προγραμματισμός

Άπληστος Αλγόριθμος του Dantzig

(Greedy Approximation Algorithm of G. Dantzig)

Διατάσω τα αντικείμενα σε φθίνουσα σειρά ως προς το λόγο κέρδος/βάρος και διαλέγω πρώτα το μεγαλύτερο αριθμό αντικειμένων με το μεγαλύτερο λόγο. Συνεχίζω να διαλέγω αντικείμενα όσο το συνολικό βάρος δεν υπερβαίνει το όριο του σακιδίου B.

Εφαρμογή

Η χωρητικότητα του σακιδίου είναι 22 kgr ενώ το κέρδος και το βάρος κάθε αντικειμένου δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

αντικείμενο	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
κέρδος	10	5	15	7	6	18	3
βάρος	3	3	5	7	2	4	2

Ζητάμε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος του σακιδίου χωρίς να υπερβούμε το όριο βάρους.

Εφαρμογή

Σχηματίζω τους λόγους κέρδος/βάρος.

αντικείμενο	1	2	3	4	5	6	7
κέρδος	10	5	15	7	6	18	3
βάρος	3	3	5	7	2	4	2
κέρδος/βάρος	10/3	5/3	3	1	3	9/2	3/2

Διαλέγω 5 μονάδες αντικειμένου 6 με συνολικό βάρος 20, συνεχίζοντας δεν μπορώ να διαλέξω το αντικείμενο 1 ούτε το αντικείμενο 3, συνεχίζω διαλέγοντας 1 μονάδα αντικειμένου 5, οπότε έχω συνολικό βάρος 22 που είναι το όριο και συνολικό κέρδος 96.

Βιβλιογραφία

- Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα Θεωρία και Ασκήσεις, Φακίνος και Οικονόμου, 2003
- Introduction to Operations Research, Hillier and Lieberman, 2007

Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας