ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μέθοδος Lagrange

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης Κόστους της Εταιρείας

Πρόβλημα Μεγιστοποίησης Χρησιμότητας του Καταναλωτή

Μέθοδος Lagrange

Η γενική ιδέα είναι σε ένα μαθηματικό μοντέλο να βρούμε τη βέλτιστη λύση «χαλαρώνοντας» κάποιον/κάποιους περιορισμό/περιορισμούς, δηλαδή μεταφέροντάς τον/τους στην αντικειμενική συνάρτηση ενώ παράλληλα εισάγουμε κάποιο κόστος για την παραβίασή του/τους.

Έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \quad f(\vec{x})$$
$$s.t. \quad c_i(\vec{x}) = 0 \;\; \forall\, i \in I$$

Αυτό μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \lambda_i) = f(\vec{x}) - \sum_{i \in I} \lambda_i c_i(\vec{x})$$

όπου λ_i είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange που αντιστοιχούν στους περιορισμούς. Τώρα ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\mathcal{L}$ οπότε χρησιμοποιούμε παραγώγους.

Έστω λοιπόν το πρόβλημα:

$$max/\min f(x,y,z)$$
$$subject\ to\ g(x,y,z)=k$$
με k σταθερό

Τότε σχηματίζω τη συνάρτηση Lagrange που περιλαμβάνει τις μεταβλητές x, y, z, λ ως εξής:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda(g(x,y,z)-k)$$

Στη συνέχεια με χρήση μερικών παραγώγων βρίσκω το σημείο του ακρότατου δηλαδή επιλύω το παρακάτω σύστημα

$$\mathcal{L}_x = 0$$
$$\mathcal{L}_y = 0$$
$$\mathcal{L}_z = 0$$
$$\mathcal{L}_\lambda = 0$$

και ακολούθως χρησιμοποιώ τη λύση του συστήματος για να υπολογίσω το ζητούμενο ελάχιστο ή μέγιστο.

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης Κόστους Εταιρείας

Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής μιας εταιρείας δίνεται από τη σχέση $Q = 50\sqrt{KL}$ όπου Q η παραγόμενη ποσότητα, K το κεφάλαιο που δαπανάται στην παραγωγή και L το κόστος εργασίας. Έστω ότι η εταιρεία έχει παραγγελίες για 1000 μονάδες προϊόντος ενώ το κόστος εργασίας είναι 5 \$ ανά μονάδα προϊόντος και το κόστος κεφαλαίου είναι 20 \$ ανά μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί ο συνδυασμός κεφαλαίου και εργασίας που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος παραγωγής.

Το μαθηματικό μοντέλο είναι

$$min_{\{L,K\}} TC = 5L + 20K$$
$$s.t.\, Q = 50\sqrt{LK} = 1000$$

Οπότε δημιουργώ τη συνάρτηση Lagrange

$$\mathcal{L} = 5L + 20K - \lambda(50\sqrt{LK} - 1000)$$

και βρίσκω το ελάχιστο με χρήση μερικών παραγώγων.

Πολλαπλασιαστής Lagrange

- $\mathcal{L}_L = 5 - \lambda \cdot 50 \cdot 0.5 \cdot L^{-0.5} K^{0.5} = 0$
- $\mathcal{L}_K = 20 - \lambda \cdot 50 \cdot 0.5 \cdot K^{-0.5} L^{0.5} = 0$
- $\mathcal{L}_\lambda = 50 \cdot L^{0.5} K^{0.5} - 1000 = 0$

(Συνθήκες Πρώτης Τάξης)

Οπότε έχω ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και λύνοντας έχω *K=10, L=40* και *λ=0.4*

Αυτό σημαίνει ότι όταν ο περιορισμός αλλάζει κατά μία μονάδα τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλάζει κατά 0.4, δηλαδή όταν η εταιρεία παράγει 1001 μονάδες τότε το συνολικό κόστος αυξάνει κατά 0.4 $.

Τυπικά για να είμαστε σίγουροι ότι έχουμε βρει το ελάχιστο πρέπει να ελέγξουμε και τις Συνθήκες Δεύτερης Τάξης.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial K} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial L} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial K \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial L \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial L \partial K} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial L^2} \end{bmatrix} < 0$$

Ωστόσο στα πλαίσια αυτού του μαθήματος το βήμα αυτό παραλείπεται.

Πρόβλημα Μεγιστοποίησης Χρησιμότητας του Καταναλωτή

Ένα καταναλωτής έχει στη διάθεσή του *M*=360 $ και μπορεί να αγοράσει 2 προϊόντα x, y οι τιμές των οποίων είναι $P_x = 10$ και $P_y = 30$. Το όφελος που έχει ο καταναλωτής από τα δύο προϊόντα δίνεται από τη συνάρτηση χρησιμότητας $U(x, y) = x^{3/4}y^{1/4}$. Ποιος είναι ο συνδυασμός των προϊόντων που μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα για τον καταναλωτή;

Το μαθηματικό μοντέλο είναι

$$max_{\{x,y\}} U(x,y) = x^{3/4} y^{1/4}$$
$$s.t. M = 10x + 30y = 360$$

Οπότε δημιουργώ τη συνάρτηση Lagrange

$$\mathcal{L} = x^{3/4} y^{1/4} + \lambda(360 - 10x - 30y)$$

και βρίσκω το μέγιστο με χρήση μερικών παραγώγων.

Συνθήκες Πρώτης Τάξης

- $\mathcal{L}_x = 0.75x^{-0.25}y^{0.25} - 10\lambda = 0$
- $\mathcal{L}_y = 0.25x^{0.75}y^{-0.75} - 30\lambda = 0$
- $\mathcal{L}_\lambda = 360 - 10x - 30y = 0$

Οπότε έχω ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και λύνοντας έχω $x = 27, y = 3$ και $\lambda = 0.0433$

Αυτό σημαίνει ότι όταν ο περιορισμός αλλάζει κατά μία μονάδα τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλάζει κατά 0.0433, δηλαδή όταν ο καταναλωτής ξοδεύει 361 \$ τότε το συνολικό όφελός του αυξάνει κατά 0.0433. Το λ λέγεται και σκιώδης τιμή (shadow price).

Τυπικά για να είμαστε σίγουροι ότι έχουμε βρει το μέγιστο πρέπει να ελέγξουμε και τις Συνθήκες Δεύτερης Τάξης. Πρέπει δηλαδή να ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{bmatrix} > 0$$

Άσκηση

Μια εταιρεία κατασκευάζει τηλεοράσεις σε δύο εργοστάσια Α και Β. Υποθέστε ότι x τηλεοράσεις κατασκευάζονται στο εργοστάσιο Α και y τηλεοράσεις στο εργοστάσιο Β. Το συνολικό κατασκευής δίνεται από τη σχέση $C(x,y) = 6x^2 + 12y^2$ ενώ η δέσμευση της εταιρείας είναι να παράγει 90 τηλεοράσεις κάθε μήνα. Να βρεθεί ο συνδυασμός παραγωγής που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος και να υπολογιστεί αυτό.

Βιβλιογραφία

- Micro-Economic Theory, Layard and Walters

Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας