# ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

# ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΙΕΡΑΡΧΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ
# ANALYTIC HIERACHY PROCESS

# Αξιωματικές Υποθέσεις της AHP

1. Το αξίωμα της αμοιβαιότητας

Στη σύγκριση του Α με το Β αν Α/Β=Ρ, τότε η σύγκριση του Β με το Α γίνεται με το λόγο Β/Α=1/Ρ.

2. Το αξίωμα της ομοιογένειας

Στις κατά ζεύγη συγκρίσεις τα στοιχεία τα οποία συγκρίνονται μεταξύ τους δεν πρέπει να διαφέρουν περισσότερο από μία τάξη μεγέθους.

Δεν μπορείς να συγκρίνεις περίπτερο με ουρανοξύστη ως προς το μέγεθος.

# Αξιωματικές Υποθέσεις της AHP

3. Το αξίωμα της σύνθεσης

Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων κατά ζεύγη που ανήκουν σε ένα επίπεδο δεν επηρεάζονται από τα χαμηλότερα επίπεδα.

4. Το αξίωμα της εύλογης προσδοκίας

Για να εκπληρωθούν οι προσδοκίες σε σχέση με την τελική ιεράρχηση των επιλογών, αυτού που καλείται να λάβει την απόφαση, πρέπει να συμπεριλαμβάνονται με πληρότητα όσα θεωρούνται κατά τη γνώμη του σημαντικά για τη λήψη της απόφασης.

# Η μέθοδος του Ιδιοδιανύσματος

Έστω τα στοιχεία $C_1, \ldots, C_n$ενός επιπέδου της ιεραρχίας, πρέπει να βρούμε τα βάρη $w_1, \ldots, w_n$ που δείχνουν πως επηρεάζουν τα $C_1, \ldots, C_n$ κάποιο από τα στοιχεία του επόμενου επιπέδου.

Η ισχύς του στοιχείου $C_i$ όταν συγκρίνεται με το στοιχείο $C_j$ δίνεται από το $a_{ij}$ οπότε $A = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας των συγκρίσεων.

Ισχύει ότι $a_{ji} = 1/a_{ij}$ άρα ο $A$ έχει αντίστροφο.

# Η μέθοδος του Ιδιοδιανύσματος

Ο $A$ λέγεται συνεπής αν και μόνο αν

$$a_{ik} = a_{ij} \times a_{jk} \; \forall \, i, j, k.$$

Όταν οι συγκρίσεις είναι ακριβείς τότε ο πίνακας $A$ είναι συνεπής και τότε για τα γνωστά βάρη θα έχουμε

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad \forall \, i, j = 1, \ldots, n$$

## Η μέθοδος του Ιδιοδιανύσματος

Οπότε $a_{ij} \times a_{jk} = \frac{w_i}{w_j}\frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} = a_{ik}$

και λόγω της αντιστροφής έχουμε

$$a_{ji} = \frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{w_i/w_j} = \frac{1}{a_{ij}}.$$

Μπορούμε λοιπόν με μορφή εξίσωσης να γράψουμε $y = A \cdot x$ όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$

## Η μέθοδος του Ιδιοδιανύσματος

$y = A \cdot x \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n \,.$

Επίσης έχουμε $a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = 1 \; \forall \; i, j = 1, \dots, n$ οπότε

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \frac{1}{w_i} = n, \quad i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = n w_i, \quad i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$

$Aw = nw$

# Η μέθοδος του Ιδιοδιανύσματος

| | $A_1$ | $A_2$ | … | $A_n$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $w_1/w_1$ | $w_1/w_2$ | … | $w_1/w_n$ | $w_1$ | | $w_1$ |
| $A_2$ | $w_2/w_1$ | $w_2/w2$ | … | $w_2/w_n$ | $w_2$ | | $w_2$ |
| . | . | . | | | $w_3$ | $= n$ | $w_3$ |
| . | . | . | | | … | | … |
| . | . | . | | | $w_n$ | | $w_n$ |
| $A_n$ | $w_n/w_1$ | $w_n/w_2$ | … | $w_n/w_n$ | | | |

Τα παραπάνω βασίζονται στην περίπτωση όπου οι μετρήσεις είναι ακριβείς και άρα ο πίνακας $A$ είναι συνεπής. Στην πραγματικότητα όμως οι αριθμοί $a_{ij}$ βασίζονται στην υποκειμενική κρίση αυτού που πραγματοποιεί τις συγκρίσεις οπότε αποκλίνουν από το λόγο $w_i/w_j$ .

## Η μέθοδος του Ιδιοδιανύσματος

Αν οι τιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ικανοποιούν την εξίσωση $Ax = \lambda x$, τότε οι $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ και αν $a_{ii} = 1 \; \forall \; i$ τότε έχουμε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$.

Άρα αν ισχύει η $Aw = nw$ τότε όλες οι ιδιοτιμές είναι μηδενικές εκτός από μια που θα ισούται με $n$ και επομένως στην περίπτωση που ο πίνακας $A$ είναι συνεπής, η μεγαλύτερη ιδιοτιμή ισούται με $n$.

# Η μέθοδος του Ιδιοδιανύσματος

Αν σε έναν πίνακα $A$ ο οποίος είναι ένας θετικός αντιστρέψιμος πίνακας, οι τιμές $a_{ij}$ υποστούν μια μικρή αλλαγή τότε και οι ιδιοτιμές θα υποστούν μια αντίστοιχα μικρή αλλαγή.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν η διαγώνιος του $A$ είναι μοναδιαία (δηλαδή $a_{ii} = 1$) και ο πίνακας είναι συνεπής τότε ακόμη και να υπάρξουν μικρές μεταβολές στις τιμές των στοιχείων η μεγαλύτερη ιδιοτιμή θα παραμείνει κοντά στο $n$ και οι υπόλοιπες κοντά στο μηδέν.

# Η μέθοδος του Ιδιοδιανύσματος

Επομένως αν ο $A$ είναι ο πίνακας που περιέχει τις τιμές των συγκρίσεων κατά ζεύγη, για να βρεθεί το διάνυσμα των προτεραιοτήτων θα πρέπει να βρεθεί το διάνυσμα $w$ για το οποίο θα ισχύει $Aw = \lambda_{max} w$.

Για να εξασφαλίσουμε μια κανονικοποιημένη λύση όπως θέλουμε μεταβάλλουμε ελαφρώς το διάνυσμα $w$ θέτοντας $a = \sum_{i=1}^{n} w_i$ και αντικαθιστώντας το $w$ με τη σχέση $(1/a)w$.

Η αλλαγή αυτή διασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι μοναδικό και επιπλέον $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ .

# Συνέπεια του πίνακα $A$

Η συνέπεια του πίνακα σχετίζεται άμεσα με τη συνέπεια των συγκρίσεων και των αποφάσεων. Με τον όρο συνέπεια του πίνακα εννοούμε ότι γνωρίζοντας ένα βασικό ποσοστό των στοιχείων μίας σειράς του πίνακα τα υπόλοιπα στοιχεία μπορούν να προκύψουν λογικά από αυτό. Όταν λοιπόν έχουμε *n* στοιχεία, τότε θα έχουμε και $n\text{-}1$ συγκρίσεις κατά ζεύγη. Βασικό εργαλείο ελέγχου της συνέπειας ενός πίνακα είναι η τιμή της πρωτεύουσας ιδιοτιμής. Από την τιμή αυτή προκύπτει το πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα, το οποίο και κανονικοποιείται οπότε μετατρέπεται στο διάνυσμα προτεραιοτήτων.

# Συνέπεια του πίνακα $A$

Για τον πίνακα $A = (a_{ij})$ ορίζουμε ένα πίνακα $(A^r)$ ως πολλαπλασιαστικό του όταν για κάθε στοιχείο του $a_{ij}$ έχουμε ότι $a_{ji}^r = \frac{1}{a_{ij}}$.

Ένας θετικά ορισμένος πίνακας $A^r$ είναι συνεπής όταν η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_{max}$ είναι ίση με $n$.

Μικρές αλλαγές στις τιμές των στοιχείων επιφέρουν και μικρές αλλαγές στην πρωτεύουσα ιδιοτιμή. Άρα το $\lambda_{max} - n$ αποτελεί και το μέτρο συνέπειας.

Αν το $\lambda_{max} - n$ κανονικοποιηθεί σύμφωνα με το μέγεθος του πίνακα τότε προκύπτει ο δείκτης συνέπειας, ο οποίος μας δείχνει και την απόκλιση του πίνακα.

Δείκτης συνέπειας: $C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$

# Εργασία 2

Στα πλαίσια της εργασίας καλείστε να πραγματοποιήσετε μία πολυ-κριτήρια μοντελοποίηση απόφασης, χρησιμοποιώντας την εφαρμογή του Excel του παρακάτω link. Η εργασία θα αφορά σε πρόβλημα της επιλογής σας.

Link: https://bpmsg.com/new-ahp-excel-template-with-multiple-inputs/

## Ενδεικτική Βιβλιογραφία:


1. Saaty, T.H. (1972). “Priorities and Hierarchies: Eigenvalue Structure”, Working Paper, University of Pennsylvania.
2. Saaty, T.H. (1977). “A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures”, Journal of Mathematical Psychology 15 (3), 234-281.
3. Saaty, T.H. (1987). “The Analytic Hierarchy Process-What it is and how it is used”, Mathematical Modelling 9 (3-5), 161-176.
4. Golden, B.L., Wasil, E.A. and Harker, P.T. (1989). The Analytic Hierarchy Process, Springer.

Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας