

1. α) [5] Για ποια λ τα διανύσματα $\alpha = (1, \lambda, 2)$, $\beta = (2, 3\lambda, 4)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα;

β) [10] Ένας υπόχωρος A έχει ως βάση τα διανύσματα

$$\alpha = (1, 1, \mu) \text{ και } \beta = (2, 1, 3\mu).$$

Ποια πρέπει να είναι η τιμή του μ ώστε το διάνυσμα $(-1, 0, 2)$ να ανήκει στο A ;

2. Δίδεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

α) [5] Να υπολογίσετε τον πίνακα A^3 .

β) [10] Δείξτε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον A^{-1} .

3. [15] Εκφράστε το σύστημα Σ :

$$\left. \begin{aligned} \rho x + y + z &= \rho \\ x + \rho y + z &= 2 \\ x + y + \rho z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

σε μορφή πίνακα και, κάνοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στον πίνακα αυτόν, εξετάστε για ποια ρ το σύστημα Σ έχει λύση και αν είναι μοναδική.

4. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

α) [5] Εξετάστε αν έχει τοπικά ακρότατα η $f(x)$.

β) [10] Εξετάστε αν έχει λύση η εξίσωση $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$.

5. [10] Για την συνάρτηση

$$g(x) = e^{|x|}, x \in \mathbb{R},$$

υπολογίστε την παράγωγο $g'(-2)$. Υπάρχει η παράγωγος $g'(0)$;

6. [15] Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'y^2 = x$, με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$.

7. [10] Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $y = x^4$ και της ευθείας $y = 1$.

8. [5] Βρείτε τα $\sigma \in \mathbb{R}$ για τα οποία

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} (\sigma + 3)^v = 0$$

που έχουν επιπλέον την ιδιότητα

$$\text{η σειρά } \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\sigma + \frac{1}{2}\right)^v \text{ να συγκλίνει.}$$