1) α) Για να είναι γνησίως αύξουσα αρκεί $f'(x)>0$ για κάθε x. Έχουμε $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{-x}+2x>0 \Leftrightarrow e^{-x}>-2x$.

Για $x>0$ προφανώς $f'(x)>0$.

Έστω $x\leq 0$ τότε $-x\geq 0$. Άρα θέλουμε $e^{y}>2y$ για κάθε $y\geq 0$. Θέτουμε $g(y)=e^{y}-2y$, $y\geq 0$.

Έχουμε $g(0)=e^{0}>0$. Θέλουμε να δείξουμε $g(y)>0$ για κάθε $y\geq 0$.

Έχουμε $g'(y)>0 \Leftrightarrow e^{y}-2>0 \Leftrightarrow e^{y}>2 \Leftrightarrow y>\ln 2$.

$g'(y)=0 \Leftrightarrow y=\ln 2$

$g'(y)<0 \Leftrightarrow y<\ln 2$.

Άρα έχουμε

x	0		$\ln 2$	
$g'(x)$	1	$-$	0	$+$
$g(x)$		φθίνουσα		αύξουσα

Συνεπώς η ελάχιστη τιμή που παίρνει η $g(y)$ είναι
$g(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\cdot\ln 2 = 2(1-\ln 2)$.

Αλλά $1-\ln 2 = \ln e-\ln 2 = \ln\frac{e}{2}$, $\frac{e}{2}>1$, άρα $\ln\frac{e}{2}>0$.

Συνεπώς $g(y)>0$ για $y\geq 0$.

β) Παρατηρούμε ότι $f(0)=-1+2>0$ και
$f(-2)=-e^{2}+4+2 < -(2{,}7)^{2}+6 = -7{,}29+6<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x_0\in(-2,0)$ ώστε $f(x_0)=0$. Το x_0 είναι μοναδικό γιατί η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

2) $\int x\cdot \sigma\upsilon\nu(2x)\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\left(\eta\mu(2x)\right)' dx =$

$= \frac{x}{2}\cdot\eta\mu(2x) - \int\left(\frac{x}{2}\right)'\cdot\eta\mu(2x)\,dx = \frac{x}{2}\cdot\eta\mu(2x) - \int\frac{1}{2}\,\eta\mu(2x)\,dx =$

$= \frac{x}{2}\cdot\eta\mu(2x) - \frac{1}{4}\int(2x)'\cdot\eta\mu(2x)\,dx = \frac{x}{2}\cdot\eta\mu(2x) - \frac{1}{4}\int\eta\mu\, y\,dy \;(*)$

όπου $y = 2x$. Άρα $(*) = \frac{x}{2}\,\eta\mu(2x) + \frac{1}{4}\,\sigma\upsilon\nu\, y + c =$

$= \frac{x}{2}\,\eta\mu(2x) + \frac{1}{4}\,\sigma\upsilon\nu(2x) + c.$

3) $\int f(x)\,dx = x\cdot\eta\mu e^x + e^{x^2} + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \left(x\,\eta\mu e^x + e^{x^2} + c\right)' = x'\cdot\eta\mu e^x + x\cdot\left(\eta\mu e^x\right)' +$

$+ e^{x^2}\cdot(x^2)' = \eta\mu e^x + x\cdot\sigma\upsilon\nu e^x\cdot e^x + e^{x^2}\cdot 2x.$

4) Κάνουμε στοιχειώδεις πράξεις στο πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & \lambda-6 & 7 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 7+7\cdot\frac{\lambda-6}{5} & -2-3\cdot\frac{\lambda-6}{5} \end{array}\right].$$

Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad -5y + 7z = -3 \\ \quad\quad \left(7+7\cdot\frac{\lambda-6}{5}\right)z = -2-3\,\frac{\lambda-6}{5} \end{array}\right\}$$

Είναι άμεσο ότι αν $7+7\cdot\frac{\lambda-6}{5}\neq 0 \Leftrightarrow 5+\lambda-6\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$ τότε έχουμε μια μοναδική τιμή για το z άρα και για τα y και x.

5) Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

και $\det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0\cdot 1 - 2\cdot 2 = -4 \neq 0$. Άρα είναι αντιστρέψιμος.

6) Τα κοινά σημεία (x,y,z) των επιπέδων πρέπει να ικανοποιούν το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x+y-z &= 1 \\ -x+y+2z &= 2 \\ x+5y+z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Λύνουμε το σύστημα με τη βοήθεια πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με

$$\left.\begin{aligned} x+y-z &= 1 \\ 2y+z &= 3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y &= 1+z \\ 2y &= 3-z \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= \frac{3-z}{2} \\ x &= 1+z-\frac{3-z}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= \frac{3-z}{2} \\ x &= -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}z \end{aligned}\right\}$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}z, \frac{3}{2}-\frac{z}{2}, z\right) =$
$= z\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$, $z\in\mathbb{R}$, τα οποία είναι σημεία ευθείας.

7) Έχουμε ότι $|\vec{\alpha}\times\vec{b}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{b}|\cdot ημφ = 2\cdot ημφ$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{b} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{b}|\cdot συνφ = 2\cdot συνφ$

όπου φ η γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{\alpha},\vec{b}$.

Επειδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{b} = -1$, έχουμε $-1 = 2συνφ \Rightarrow$

$συνφ = -\frac{1}{2}$. Αλλά $ημ^2φ + συν^2φ = 1 \Leftrightarrow$

$ημ^2φ + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow ημφ = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$.

Επειδή $0 \leq φ \leq π$, $ημφ \geq 0$. Οπότε $ημφ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Οπότε $|\vec{\alpha}\times\vec{b}| = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

8) $2y'y^2 = e^x$ άρα $\int 2y'y^2\,dx = \int e^x\,dx$

$\Leftrightarrow \int (y^2)'\,dx = e^x + c'$. $\Leftrightarrow y^2 = e^x + c \Leftrightarrow$

$y = \pm\sqrt{e^x + c}$. (Σημ. επειδή $y' > 0$ όταν $y \neq 0$,

έχουμε $y = \sqrt{e^x + c}$.)